Ejercicios y problemas a la parte I

ENUNCIADOS

I.1. Resolver los sistemas de ecuaciones:

a) $$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=5\\ 2x-y-2z=-1\\ x+3y+z=0\end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x+2y+2z=-2\\ 3x+y+3z=6\\ 2x+y-2z=-1\\ 2x+y+z=2\end{array}\right\}$$

I.2. Resolver, en el caso de ser compatibles, los sistemas de ecuaciones:

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x-4y+6z=7\\ 5x+2y-4z=5\\ x+3y-5z=3\end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y-z=3\\ 2x-y+4z=3\\ 3x+2y-z=8\end{array}\right\}$$

I.3. Hallar los valores del parámetro α que hacen compatibles a los siguientes sistemas. Para dichos valores de α, resolver estos:

a) $$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=0\\ 2x+y-3z=5\\ -x+7y+9z=\alpha\end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1\\ 2x-y+3z=5\\ 3x+4y-2z=2\\ x+3y-2z=\alpha\end{array}\right\}$$

I.4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $$\left.\begin{array}{r} x_1-x_2+2x_3-x_4=0\\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=4\\ -x_1+2x_2+x_3-2x_4=-2\\ 3x_1-x_2-3x_3+x_4=1\end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3-x_4=0\\ 2x_1+3x_2+x_3-3x_4=0\\ -3x_1-2x_2-2x_3+4x_4=0\\ 4x_1+2x_2+5x_3-2x_4=1\end{array}\right\}$$

I.5. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema, en función del parámetro α, y resolverlo cuando sea compatible:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+4z-3u=2\\ 3x+7y+5z-5u=3\\ 5x+12y+6z-7u=\alpha\end{array}\right\}$$

I.6. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z-3u+2v=4\\ x+2y-2z-5u-2v=-3\\ 3x-y-3z-u+4v=4\end{array}\right\}$$

I.7. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z-u=8\\ 2x+4y+2z-u=5\\ 3x+2y-z=5\\ 2x+y-u=5\end{array}\right\}$$

I.8. Discutir, en función del parámetro α, el siguiente sistema de ecuaciones y resolverlo cuando sea compatible:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1\\ 3x+\alpha y+\alpha z=5\\ 4x+\alpha y=5\end{array}\right\}$$

I.9. Sea S un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Sabiendo que es $m<n$, pruébese que S puede ser incompatible o compatible indeterminado, pero no puede ocurrir que tenga una sola solución.

I.10. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 4x_5 = -3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = -3 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \end{array}\right\}$$

I.11. Discutir (en función de α) y resolver cuando sea compatible el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = \alpha \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \end{array}\right\}$$

I.12. Si ninguno de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p$ depende linealmente del sistema $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_h\}$, ¿puede ocurrir que alguna combinación lineal de aquéllos dependa linealmente de S?

I.13. Estudiar si los siguientes sistemas de vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes:

a) $\{(5, 3, 4), (1, 3, 2), (1, 1, 1)\}$

b) $\{(3, 2, 1), (1, -3, 2), (-1, -2, 3)\}$

I.14. Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son dos vectores distintos, analizar si algunos de los vectores $(2 + \lambda)\bar{u} + (3 - \lambda)\bar{v}$ (λ = escalar) pueden ser iguales.

I.15. Sean $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_p\}$ y $T = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_q\}$ dos sistemas de vectores. Si cada uno de los S y T es linealmente independiente y todos los vectores de T son independientes de S, ¿el sistema $S \cup T$ ha de ser independiente?

I.16. Sea $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_p\}$ un sistema de vectores de $\mathbb{R}^n$. Si es $p > n$, compruébese que el sistema S es linealmente dependiente.

I.17. Estudiar si el sistema $S = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ de vectores de $\mathbb{C}^3$ es linealmente dependiente o independiente, en los siguientes casos:

a) $\bar{u} = (1, 0, -i)$, $\bar{v} = (0, i, -1)$, $\bar{w} = (i, 1, 1 + i)$

b) $\bar{u} = (1, i, -i)$, $\bar{v} = (0, 1, 1 + 2i)$, $\bar{w} = (1, 1 + i, -1)$

I.18. Sean dados los vectores

$$\bar{u} = (2, 3, 5) \quad , \quad \bar{v} = (1, 2, 3) \quad \text{y} \quad \bar{w} = (2, 1, 3)$$

Analizar si existen algunos escalares a_i, b_i y c_i tales que los vectores:

$$\bar{x} = a_1\bar{u} + b_1\bar{v} + c_1\bar{w}$$

$$\bar{y} = a_2\bar{u} + b_2\bar{u} + c_2\bar{w}$$

$$\bar{z} = a_3\bar{u} + b_3\bar{u} + c_3\bar{w}$$

sean linealmente independientes.

I.19. Sean $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n$ los vectores de $\mathbb{R}^n$ que tienen los siguientes componentes: el vector $\bar{u}_i$ (para $i = 1, 2, ..., n$) tiene todas sus componentes valiendo 1 excepto la de lugar i que vale h. Hallar el rango de $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ en función de h.

I.20. Hallar el rango del sistema:

$$S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_5, \bar{u}_6\}$$

siendo:

$$\bar{u}_1 = (2, 6, -1, 0, -1)$$

$$\bar{u}_2 = (2, -2, 1, -3, 2)$$

$$\bar{u}_3 = (3, 4, 1, -1, 2)$$

$$\bar{u}_4 = (1, -2, 2, -1, 2)$$

$$\bar{u}_5 = (-1, 0, 1, 2, 1)$$

$$\bar{u}_6 = (1, 8, -3, 1, -4)$$

I.21. Sean $R = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_p\}$ y $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_p\}$ dos sistemas de igual número de vectores (de $\mathbb{R}^n$, por ejemplo) cuyos rangos respectivos son r y s. Considérese el sistema $T = \{\bar{w}_i = \bar{u}_i + \bar{v}_i \ / \ i = 1, 2, ..., p\}$. Pruébese que rang $T \leqslant r + s$.

I.22. Hallar el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 7 & -2 & -4 & -6 \\ 2 & 5 & -8 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & -1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

I.23. Hallar el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

I.24. Hallar los valores de α y β para los que el rango de la matriz A es lo más pequeño posible:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & \alpha & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -3 & \beta \end{bmatrix}$$

I.25. Hallar el rango de la siguiente matriz compleja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 2+i & 1 & 1+2i & 4+i \\ -1+i & 1+i & 1+i & -1+i \end{bmatrix}$$

I.26. Hallar el rango de la siguiente matriz, de tamaño $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{bmatrix} \quad \text{para } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$$

Analizar, primero, los casos $n = 3$ y $n = 4$.

I.27. Sea $M = AB$ el producto de las matrices A y B. Compruébese que si A tiene una fila nula, entonces también M tiene una fila nula y que si B tiene una columna nula, entonces M también tiene una columna nula.

I.28. Hallar los números reales x, y, z, u y v para los que se verifica:

$$\begin{bmatrix} x & 2 \\ 0 & y \\ z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & v \\ u & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

I.29. Sabiendo que $AM = B$, donde A, B y M son matrices cuadradas de igual tamaño, y si A y B son triangulares superiores y no nulas. Se pide:

a) Analizar si M ha de ser triangular superior.

b) Encontrar alguna condición suficiente que permita garantizar que M es triangular superior.

I.30. Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño que son simétricas. Hallar una condición necesaria y suficiente para que su producto AB sea simétrica.

I.31. Hallar A^3, siendo A la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta & 0 & -1 \\ \operatorname{sen}\theta & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

I.32. Hallar una matriz A tal que:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 8 & 38 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

I.33. Hallar A^n, para $n \in \mathbb{N}$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I.34. Hallar A^p, para $p \geqslant n$, donde A es la siguiente matriz de tamaño $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

I.35. Calcular A^2 y A^3, donde A es la matriz de tamaño $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

I.36. Hallar todas las matrices de tamaño 4×4 que conmutan con la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

I.37. Una matriz cuadrada M tal que $M^2 = M$ se llama «idempotente». Sabiendo que A y B son matrices cuadradas tales que $A = AB$ y que $B = BA$, compruébese que A y B son idempotentes.

I.38. Se llama *traza* de una matriz $A = [a_{ij}]$, cuadrada de tamaño $n \times n$, a la suma de los elementos de su diagonal; esto es, a:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Compruébese que, si A y B son matrices del mismo tamaño $n \times n$, se verifica que:

1. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$
2. $\operatorname{tr}(AA^t) > 0$ si $A \neq O$.

I.39. Considere la familia de las matrices $A(a, h)$, de tamaño $n \times n$, dependientes de los parámetros reales a y h, siguientes:

$$A(a, h) = \begin{bmatrix} ah & a & a & \cdots & a \\ a & ah & a & \cdots & a \\ a & a & ah & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & ah \end{bmatrix}$$

a) Compruébese que el producto de $A(a, h)$ por $A(a', h')$ es también una matriz de la familia.

b) Analícese si $A(a, h)$ tiene matriz inversa perteneciente a la familia.

(Indicación: recúrrase a las matrices $M = A(1, 1)$ e I, matriz unidad, expresando $A(a, h)$ como combinación de ellas.)

I.40. Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo tamaño. Si A es invertible y A y B conmutan, pruébese que A^{-1} y B también conmutan.

I.41. Hallar la matriz inversa, si existe, de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

I.42. Hallar la inversa de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & -8 & 11 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

I.43. Hallar las inversas de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

I.44. Hallar la inversa de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -9 & -8 & 5 \\ -3 & -12 & 10 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

I.45. Sea A una matriz cuadrada dada tal que $A^3 = O$. Considérese la familia que forman las matrices:

$$M(\lambda) = I + \lambda A + (\lambda^2/2)A^2 \quad , \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}$$

Compruébese que la familia es un grupo abeliano (conmutativo) respecto del producto de matrices; hallar $M(\lambda)^{-1}$.

I.46. Sean A y B dos matrices cuadradas, de tamaño $n \times n$. Se dice que A es *semejante* con B, y se pone $A \sim B$, si existe una matriz regular P tal que $B = P^{-1}AP$. Compruébese que:

1. $(A \sim B) \Rightarrow A^p \sim B^p$ (para $p \in \mathbb{N}$ cualquiera)
2. La semejanza de matrices es una relación de equivalencia para el conjunto $\mathcal{M}_{n \times n}$, de las matrices de tamaño $n \times n$.

I.47. Hallar la matriz inversa de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n & a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

I.48. Hallar la inversa de la siguiente matriz compleja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2-i & -1+2i \\ 1 & 2 & -2+i \\ -1 & -2+i & 2-2i \end{bmatrix}$$

I.49. Sea A la matriz cuadrada, de tamaño $n \times n$, cuyos elementos son:

$$\text{elemento de lugar } (i, j) \text{ de } A = \begin{cases} a, & \text{si } i = j \\ b, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Hallar a y b para que se verifique la relación $A^2 = I$.

I.50. Sean A y S dos matrices cuadradas; S es simétrica. Analícese si se verifica que:

a) A^tA es simétrica.

b) A^tSA es simétrica.

c) A antisimétrica $\Rightarrow$ A^2 simétrica.

d) A regular $\Rightarrow$ $A^{-n} = (A^{-1})^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

I.51. Se dice que una matriz cuadrada A de elementos complejos es *unitaria* si:

$$A\bar{A}^t = I$$

($\bar{A}$ denota a la matriz conjugada de A, esto es, aquella cuyos elementos son los números complejos conjugados de los respectivos elementos de A). Se pide:

a) Estudiar si la inversa y la traspuesta de una matriz unitaria son matrices unitarias.

b) Si A es unitaria, hallar $|\det A|$.

c) Si A y B son matrices unitarias del mismo tamaño, estudiar si AB es también una matriz unitaria.

I.52. Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = O$ (matriz nula), hallar $A(I \pm A)^n$, para $n = 2, 3, \ldots$

I.53. Hallar la matriz inversa de la matriz cuadrada de tamaño $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

I.54. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0$$

I.55. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

I.56. Hallar el valor del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\beta & \beta^2 \\ \alpha\beta & \alpha^2 & \beta^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 & \alpha^2 & \alpha\beta \\ \beta^2 & \alpha\beta & \alpha\beta & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

I.57. Hallar el determinante de la siguiente matriz, comprobando que no depende de x:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(x+a_1) & \cos(x+a_2) & \cos(x+a_3) \\ \operatorname{sen}(x+a_1) & \operatorname{sen}(x+a_2) & \operatorname{sen}(x+a_3) \\ \operatorname{sen}(a_2-a_3) & \operatorname{sen}(a_3-a_1) & \operatorname{sen}(a_1-a_2) \end{bmatrix}$$

Si a_1, a_2 y a_3 pertenecen al intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$, hallar la relación entre ellos para que A sea singular.

I.58. Calcular los siguientes determinantes:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

I.59. Calcular los siguientes determinantes:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & -8 & 8 & 3 \\ 6 & -5 & 8 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 11 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 8 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

I.60. Calcular el siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 8 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

I.61. Calcular el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

I.62. Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Hállese el determinante de la siguiente matriz M en función de los determinantes de $A+B$ y de $A-B$:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right]$$

I.63. Calcular el determinante de orden n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & \cdots & x_1+y_n \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & \cdots & x_2+y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n+y_1 & x_n+y_2 & \cdots & x_n+y_n \end{vmatrix}$$

I.64. Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ y considérese la nueva matriz $B=[a_{ij}+k]$, que se obtiene de sumar un mismo escalar k a cada uno de los elementos de A. Hállese $\det B$ en función de k, de los adjuntos α_{ij} de los elementos de A y de $\det A$.

I.65. Se considera el siguiente determinante de orden n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

Obtener la relación que liga a Δ_n con Δ_{n-1}. Calcular Δ_n.

I.66. Sea A una matriz cuadrada, de tamaño $n \times n$, antisimétrica ($A^t = -A$). Demuéstrese que si n es impar, entonces $\det A = 0$.

I.67. Calcular los determinantes de orden n:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_1 + a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 + a_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n + a_n \end{vmatrix}$$

I.68. Considérese el determinante de orden n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a + x_1 & x_2 & x_3 & \vdots & \vdots & x_n \\ x_1 & a + x_2 & x_3 & \vdots & \vdots & x_n \\ x_1 & x_2 & a + x_3 & \vdots & \vdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \vdots & \vdots & a + x_n \end{vmatrix}$$

Obtener Δ_n en función de Δ_{n-1} y, de ello, hallar Δ_n.

I.69. Obtener la relación que liga a Δ_n con Δ_{n-1}, siendo Δ_n el siguiente determinante de orden n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Calcular Δ_n.

I.70. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones, resolviéndolo siempre que sea posible:

$$\left.\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (a,\ b \in \mathbb{R} \text{ son parámetros})$$

I.71. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_{n-1} + \beta x_n &= a_n \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \beta x_{n-1} + \alpha x_n &= a_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \cdots + \alpha x_{n-1} + \alpha x_n &= a_2 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_{n-1} + \alpha x_n &= a_1 \end{aligned}\right\} \quad (\alpha \neq 0 \neq \beta)$$

I.72. Discutir y resolver, en caso de compatibilidad, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ ax + y + bz &= 1 \\ ax + y + z &= b \end{aligned}\right\} \quad (a,\ b \in \mathbb{R} \text{ son parámetros})$$

I.73. Discutir, según los valores de los parámetros a y b, y resolver, en su caso, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ ax_1 + x_3 + x_4 &= 0 \\ bx_1 + x_2 - x_4 &= -1 \\ x_2 + bx_3 + x_4 &= a \end{aligned}\right\}$$

I.74. Discutir, según los valores de los parámetros a y b, el siguiente sistema de ecuaciones. Resolver el sistema para $a = 3$ y $b = 2$:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_4 - x_5 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_5 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 + ax_4 + x_5 &= b \end{aligned}\right\}$$

I.75. Discutir, según los valores de los parámetros reales a y b, el siguiente sistema de ecuaciones ($n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas). Resolver el sistema cuando sea compatible:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + ax_{n+1} = a \\ x_2 + ax_{n+1} = a \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n + ax_{n+1} = a \\ a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1} = b \end{array}\right\}$$

I.76. Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} ix_1 + & 2x_2 + & (1+i)x_3 + & (1-i)x_4 = & -2+i \\ (1-i)x_1 + & ix_2 - & 2x_3 - & 2ix_4 = & 2 \\ -2x_1 + (1+i)x_2 + & & ix_3 - & (2-i)x_4 = & 2-3i \\ 3ix_1 - & 2ix_2 + & (1-2i)x_3 - & x_4 = & 0 \end{array}\right\}$$

I.77. Sean A y B matrices de tamaños $m \times n$ y $m \times 1$; supóngase que $r = \text{rang A} = \text{rang AB} < m, n$. Considérese el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde X es la matriz de incógnitas, de tamaño $n \times 1$. Se descomponen A y B y X en bloques del siguiente modo:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{A_3} \end{array}\right] \quad ; \quad B = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right] \quad ; \quad X = \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \hline X_2 \end{array}\right]$$

donde A_1 es una matriz regular de tamaño $r \times r$; B_1 y X_1 son de tamaño $r \times 1$. Se pide:

a) Obtener, en función de dichos bloques las soluciones del sistema.

b) Obtener las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} x + & 2y + & z + & 9u + & 15v = & -2 \\ 2x + & 3y + & z + & 17u + & 21v = & 1 \\ -x + & y + & z - & 8u + & 7v = & 1 \\ x + & 13y + & 8z + & 12u + & 94v = & -1 \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES

I.1. *a*) $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$
b) $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$

I.2. *a*) El sistema es incompatible.
b) $x = 2 - z$, $y = 1 + 2z$, z cualquiera.

I.3. *a*) $\alpha = -10$; $x = 3 + 2z$, $y = -1 - z$, z cualquiera.
b) $\alpha = -1$; $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$

I.4. *a*) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$
b) $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$

I.5. $\alpha = 4$; $x = 8 - 18z + 11u$, $y = -3 + 7z - 4u$

I.6. $x = 3 + u - 2v$, $y = -1 + 2u + v$, $z = 2 - v$

I.7. $x = 4$, $y = -2$, $z = 3$, $u = 1$

I.8. Si $\alpha = 0$, el sistema es incompatible.
Si $\alpha = 5$, hay infinitas soluciones:

$$x = 5z \quad , \quad y = 1 - 4z$$

Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 5$, hay solución única:

$$x = 1 \quad , \quad y = \frac{1}{\alpha} \quad , \quad z = \frac{1}{\alpha}$$

I.9. Reducir el sistema S a uno escalonado reducido y analizar éste.

I.10. $x_1 = -1 + x_5$, $x_2 = 0$, $x_3 = x_5$, $x_4 = 1 - x_5$

I.11. Para $\alpha = -2$ el sistema es incompatible. Para $\alpha = 1$, el sistema admite infinitas soluciones: $x = 1 - y - z$, y cualquiera, z cualquiera. Para $\alpha \neq -2$ y $\alpha \neq 1$, el sistema tiene solución única:

$$x = -\frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \quad , \quad y = \frac{1}{\alpha + 2} \quad , \quad z = \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha + 2}$$

I.12. Si, por ejemplo:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0) \quad , \quad \bar{u}_2 = (0, 1, 0)$$
$$\bar{v}_1 = (1, 1, 1) \quad , \quad \bar{v}_2 = (1, 1, -1)$$
$$p = h = 2 \quad ; \quad \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2$$

I.13. *a*) Linealmente dependiente.
b) Linealmente independiente.

I.14. Son todas distintas.

I.15. Puede no serlo, como en el ejemplo:

$$p = q = 2 \quad , \quad \bar{v}_1 = (1, 0, 0) \quad , \quad \bar{v}_2 = (0, 1, 0)$$
$$\bar{u}_1 = (1, 0, 1) \quad , \quad \bar{u}_2 = (0, 1, 1)$$

aquí es $\bar{u}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \bar{u}_2$

I.16. Supóngase que hay una combinación lineal de las $\bar{u}_i$ que es nula; recurriendo a los componentes se obtiene un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con más incógnitas (los escalares) que ecuaciones, que tendrá, pues, solución no nula.

I.17. *a*) Dependiente: $i\bar{u} - i\bar{v} = \bar{w}$.
b) Independiente.

I.18. No existen: los $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ no son independientes y los $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ dependen de ellos, luego son dependientes siempre.

I.19. Si $h \neq 1 - n$ y $h \neq 1$, el rango es n; si $h = 1 - n$, el rango es $n - 1$; si $h = 1$, el rango vale 1.

I.20. $\operatorname{rang} S = 4$.

I.21. Sean $\bar{u}_{i_1}, ..., \bar{u}_{i_r}$ y $\bar{v}_{j_1}, ..., \bar{v}_{j_s}$ sistemas independientes de R y S. Todos los vectores de T dependen linealmente de los vectores de $\{\bar{w}_{i_1}, ..., \bar{w}_{i_r}\} \cup \{\bar{v}_{j_1}, ..., \bar{v}_{j_s}\}$ y aquí hay no más de $r + s$ vectores.

I.22. El rango es 3.

I.23. El rango es 4.

I.24. $\alpha = 1$, $\beta = 7$; el rango mínimo es 3.

I.25. $\operatorname{rang} A = 2$.

I.26. Para $n = 3$, $\operatorname{rang} A = 3$ si $x \neq -y$ y $\operatorname{rang} A = 2$ si $x = -y$. Para $n = 4$, $\operatorname{rang} A = 4$ si $x \neq \pm y$ y $\operatorname{rang} A = 3$ si $x = \pm y$. Para n par $\operatorname{rang} A = n$ si $x \neq \pm y$ y $\operatorname{rang} A = n - 1$ si $x = \pm y$. Para n impar, $\operatorname{rang} A = n$ si $x \neq -y$ y $\operatorname{rang} A = n - 1$ si $x = -y$.

I.27. Si $a_{ih} = 0$, $\forall h$, entonces.

$$m_{ij} = \sum_h a_{ih}b_{hj} = \sum_h 0b_{hj} = 0, \ \forall j$$

Para columnas se procede igualmente.

I.28. $x = 1,\ y = -1,\ z = 2,\ u = 3,\ v = 1$

I.29. *a*) Puede no serlo; así ocurre con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Que A sea invertible.

I.30. Que A y B conmuten.

I.31. $A^3 = O$.

I.32. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

I.33. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & s \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, con $s = \dfrac{n(n-1)}{2}$

I.34. $A^p = O$.

I.35. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 6 & 3 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

con $s_i = \dfrac{i(i-1)}{2}$

I.36. $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$

para a, b, c, d escalares cualesquiera.

I.37. $A^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = ABB = (AB)B = AB = A$
igual se procede con B^2.

I.38. 1. Ambos trazos valen $\sum_{i,j} a_{ij}b_{ji}$.

2. $\operatorname{tr}(AA^t) = \sum_{i,j} (a_{ij})^2 > 0$.

I.39. *a*) El producto vale $\alpha M + \beta I$, donde

$$\alpha = aa'(n + h + h' - 2) \ , \ \beta = aa'(h-1)(h'-1)$$

b) $A^{-1} = A(a_1, h_1)$, con

$$h_1 = 2 - h - n \quad \text{y} \quad a_1 = \frac{1}{a(h-1)(1-h-n)}$$

(para $h \neq 1$, $h \neq 1 - n$ y $a \neq 0$).

I.40. $AB = BA \ \Rightarrow \ A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1} \ \Rightarrow$
$\Rightarrow \ (A^{-1}A)(BA^{-1}) = (A^{-1}B)(AA^{-1}) \ \Rightarrow$
$\Rightarrow \ IBA^{-1} = A^{-1}BI \ \Rightarrow \ BA^{-1} = A^{-1}B$

I.41. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -19 & 3 & 11 \\ 3 & -1/2 & -3/2 \\ 4 & -1/2 & -5/2 \end{bmatrix}$; no existe B^{-1}.

I.42. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

I.43. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

I.44. $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

I.45. $M(0) = I, \quad M(\lambda) \cdot M(\mu) = M(\mu) \cdot M(\lambda) = M(\lambda + \mu)$; $M(\lambda)^{-1} = M(-\lambda)$.

I.46. 1. $B^p = BB \cdots B =$
$= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP) =$
$= P^{-2}AA \cdots AP = P^{-1}A^pP.$

2. $A = I^{-1}AI \Rightarrow A \sim A$;
$A \sim B \Rightarrow B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} \Rightarrow B \sim A$;
$(A \sim B \text{ y } B \sim C) \Rightarrow$
$\Rightarrow (B = P^{-1}AP \text{ y } C = Q^{-1}BQ) \Rightarrow$
$\Rightarrow C = (PQ)^{-1}A(PQ) \Rightarrow A \sim C$

I.47. $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

I.48. $$A^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 1+2i & i \\ 1 & -i & 1-i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I.49. Póngase A en la forma $A = aI = bB$. Solución:

$$a = \pm (n-2) : n \quad \text{y} \quad b = \mp 2 : n$$

I.50. Los cuatro apartados son ciertos.

I.51. *a*) Ambos son unitarios.

b) $|\det A| = 1$.

c) AB es unitaria.

I.52. $A(I \pm A)^n = A$.

I.53. $$A^{-1} = \left[\begin{array}{cccc:cc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

I.54. Tiene 4 soluciones, que son:

$$x_1 = -a - b - c \quad ; \quad x_2 = a + b - c$$
$$x_3 = -a + b + c \quad ; \quad x_4 = a - b + c$$

I.55. Sólo tiene la raíz $x = 1$ (de sexto orden de multiplicidad).

I.56. $(\alpha^2 - \beta^2)^4$.

I.57. Desarrollando por la última fila:

$$\det A = -\operatorname{sen}^2(a_2 - a_3) - \operatorname{sen}^2(a_3 - a_1) - - \operatorname{sen}^2(a_1 - a_2)$$

La condición es $a_1 = a_2 = a_3$.

I.58. $\Delta_1 = 130 \quad ; \quad \Delta_2 = 61$.

I.59. $\Delta_1 = 100 \quad ; \quad \Delta_2 = 150$.

I.60. $\Delta = -5$.

I.61. $\Delta = n!$

I.62. $\det M = [\det(A + B)] \cdot [\det(A - B)]$.

I.63. $\Delta_1 = x_1 + y_1 \quad ; \quad \Delta_2 = -(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$
$\Delta_n = 0$ para $n \geqslant 3$.

I.64. $\det B = \det A + k \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}$

I.65. $\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \quad ; \quad \Delta_n = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

I.66. $\det A = \det(-A^t) = (-1)^n \det A^t = (-1)^n \det A =$
$= -\det A$, luego $\det A = 0$.

I.67. $\Delta_1 = n!$; $\Delta_2 = a_1 a_2 \cdots a_n$

I.68. $\Delta_n = a\Delta_{n-1} + a^n x_n$

$\Delta_n = a^{n-1}(a + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

I.69. $\Delta_n = (-1)^{n+1}x^{n-2} - x\Delta_{n-1}$

$\Delta_n = (-1)^{n+1}(n-1)x^{n-2}$

I.70. Para $b=0$ y $a=1$, sistema incompatible. Para $b=0$ y $a \neq 1$, sistema incompatible. Para $a=1$ y $b=1$, infinitas soluciones: $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=1-\alpha-\beta$. Para $a=1$ y $b \neq 1$, sistema incompatible. Para $a=-2$ y $b=-2$, infinitas soluciones: $x=3\alpha$, $y=1/2(\alpha-1)$, $z=\alpha$. Para $a=-2$ y $b \neq -2$, sistema incompatible.

I.71. $$x_i = \frac{\alpha\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) - [\alpha(n-1)+\beta]a_i}{(\alpha-\beta)[\alpha(n-1)+\beta]}$$

I.72. Para $b=1$ y $a=0$, compatible indeterminado; las soluciones son $(x, y, z) = (\alpha, \beta, 1-\beta)$. Para $b=1$ y $a \neq 0$, compatible indeterminado; $(x, y, z) = (\alpha, \beta, 1-\beta-a\alpha)$. Para $b \neq 1$ y $a=0$, sistema compatible determinado; $(x, y, z) = ((b+2):a, -1, -1)$. Para $a=0$ y $b=-2$, sistema compatible indeterminado; $(x, y, z) = (\alpha, -1, -1)$. Para $b \neq -1$, $b \neq -2$ y $a=0$, sistema incompatible.

I.73. Si $b \neq -2$, el sistema tiene solución única:

$$x_1 = \frac{-2}{b+2} \quad , \quad x_2 = \frac{a+b-1}{b+2} \quad , \quad x_3 = \frac{a-1}{b+2}$$

$$x_4 = \frac{a+1}{b+2}$$

Si $b=-2$, el sistema es incompatible.

I.74. Para $a \neq 1$, hay infinitas soluciones (con un parámetro). Para $a=1$ y $b \neq 1$, no hay solución. Para $a=1$ y $b=1$, hay infinitas soluciones (con dos parámetros). En el caso $a=3$, $b=2$, las soluciones son, para $\lambda \in \mathbb{R}$ cualquiera:

$$x_1 = -\lambda + 2 \quad , \quad x_2 = -2\lambda - 3 \quad , \quad x_3 = \lambda$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \quad , \quad x_5 = \frac{7}{2}$$

I.75. Si $a=0$, hay solución única $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, $x_{n+1} = b$. Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm\sqrt{1/n}$, hay solución única, que es la:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{a(1-b)}{1-a^2 n}$$

y

$$x_n = \frac{b-a^2 n}{1-a^2 n}$$

Si es $a = \pm\sqrt{1/n}$ y $b \neq 1$, no hay solución. Si $a = \pm\sqrt{1/n}$ y $b=1$, hay infinitas soluciones, que son (para $\lambda \in \mathbb{R}$ cualquiera):

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{\lambda}{\pm\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad x_{n+1} = 1-\lambda$$

I.76. $x_1 = i$, $x_2 = 1-i$, $x_3 = 2i$, $x_4 = -1$.

I.77. *a)* X_2 cualquiera, $X_1 = A_1^{-1}(B_1 - A_2 X_2)$.

b) u y v cualesquiera:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} 9u + 15v \\ 17u + 21v \\ -8u + 7v \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -6 - 9u - 2v \\ 9 + u - 3v \\ -14 - 2u - 5v \end{bmatrix}$$

Ejercicios y problemas a la parte II

ENUNCIADOS

II.1. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales (con el mismo cuerpo de escalares) y considérese el producto cartesiano $V_1 \times V_2$, en el que se definen la suma y el producto por un escalar mediante:

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + (\bar{v}'_1, \bar{v}'_2) = (\bar{v}_1 + \bar{v}'_1, \bar{v}_2 + \bar{v}'_2)$$
$$\lambda(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = (\lambda\bar{v}_1, \lambda\bar{v}_2)$$

Pruébese que con estas operaciones el conjunto $V_1 \times V_2$ es un espacio vectorial. Si V_1 y V_2 tienen dimensión finita, compruébese que:

$$\dim (V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

II.2. Compruébese que el conjunto $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es un espacio vectorial real respecto de las operaciones usuales. Se consideran las siguientes funciones de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\operatorname{sen} x,\ 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ dado})$$

Analícese si la primera es una combinación lineal de las demás.

II.3. Considérese el espacio vectorial $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$, de las matrices cuadradas de tamaño 2×2, y sea $S = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ el sistema formado por las matrices:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Comprobar que S es una base de V.

b) Hallar las coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4 en la base S de una matriz genérica M de V:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

II.4. En el espacio vectorial V de los polinomios de grado menor o igual que 4, se consideran los polinomios:

$$p_1(x) = 3 - 2x + x^2 + 4x^3 + x^4$$
$$p_2(x) = 4 - x + x^2 + 6x^3 - 2x^4$$
$$p_3(x) = 7 - 8x + 3x^2 + ax^3 + bx^4$$

($a, b \in \mathbb{R}$ fijos). Hallar a y b para que el subespacio que engendran $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $p_3(x)$ tenga dimensión 2. Hallar una base cualquiera de este subespacio y determinar las coordenadas en ellas de los tres polinomios dados.

II.5. Hallar el valor que hay que asignar al parámetro α para que las siguientes matrices no formen base del espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}$, de las matrices cuadradas de tamaño 2×2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & \alpha \end{bmatrix}$$

II.6. En el espacio vectorial de las matrices reales y simétricas de tamaño 3×3, se consideran las matrices:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar la dimensión y una base del subespacio que engendran estas 5 matrices. Obtener las coordenadas de todas ellas en la base elegida.

II.7. En el espacio vectorial $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, se consideran el sistema de funciones:

$$S = (1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x)$$

a) Comprobar que S es linealmente independiente.
b) Hallar una base B del subespacio que engendran las funciones:

$$f_1(x) = 1 - 2 \text{ sen } x + 3 \cos x - \text{sen } 2x$$
$$f_2(x) = \text{sen } x + \cos x - 2 \text{ sen } 2x - \cos 2x$$
$$f_3(x) = 2 - \cos x + \text{sen } 2x + 3 \cos 2x$$
$$f_4(x) = 1 + 4 \text{ sen } x - 2 \cos x - 2 \text{ sen } 2x + \cos 2x$$
$$f_5(x) = 4 + \text{sen } x - \cos x + 5 \cos 2x$$

c) Completar la base B hasta obtener una base del subespacio engendrado por S.

II.8. En el espacio vectorial V de los polinomios reales de grado menor o igual que n (con una sola indeterminada x), se considera la base usual $B = (1, x, x^2, ..., x^n)$. Compruébese que $B' = (1, x - a, (x - a)^2, ..., (x - a)^n)$, donde $a \in \mathbb{R}$ es dado, es una base de V y hállese la matriz del cambio de coordenadas que resulta de cambiar la base B por la B'.

II.9. En el espacio vectorial $V = \mathcal{M}_{2\times2}$, de las matrices reales de tamaño 2×2, se consideran los sistemas $S = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ y $T = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5)$, donde:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad N_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobar si S y T son sistemas equivalentes. Hallar bases de los subespacios que engendran S y T.

II.10. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n (dado). Sea $p(x)$ un polinomio cualquiera de V y considérese el sistema

$$B = (p(x), p'(x), p''(x), ..., p^{(n)}(x))$$

Analizar si B es o no una base de V, en función de quién sea $p(x)$.

II.11. Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$; sean $C_1, C_2, ..., C_p$ matrices columna de tamaño $n \times 1$. Pruébese que:

a) Si los vectores columna $AC_1, AC_2, ..., AC_p$ son linealmente independientes, entonces también lo son los $C_1, C_2, ..., C_p$.
b) Si A es regular y $C_1, C_2, ..., C_p$ son linealmente independientes, entonces también lo son $AC_1, AC_2, ..., AC_p$.

II.12. En el espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, se consideran las funciones:

$$f_1(x) = e^{a_1 x}, f_2(x) = e^{a_2 x}, ..., f_n(x) = e^{a_n x}$$

Compruébese que estas n funciones son linealmente independientes si y sólo si los números reales $a_1, a_2, ..., a_n$ son todos distintos.

II.13. Sean $S = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_p)$ y $S' = (\bar{u}'_1, \bar{u}'_2, ..., \bar{u}'_p)$ dos sistemas de p vectores, de un cierto espacio vectorial V. Demuéstrese que:

$$\text{rang } (\bar{u}_1 + \bar{u}'_1, \bar{u}_2 + \bar{u}'_2, ..., \bar{u}_p + \bar{u}'_p) \leq \text{rang } S + \text{rang } S'$$

Si A y A' son dos matrices de igual tamaño, compruébese que:

$$\text{rang } (A + A') \leq \text{rang } A + \text{rang } A'$$

II.14. Demostrar que, si U, V y W son subespacios vectoriales de un cierto espacio, entonces:

a) $(U \cap V) + (U \cap W) \subset U \cap (V + W)$
b) $(U + V) \cap (U + W) \supset U + (V \cap W)$

Determinar algún ejemplo en el que los signos de inclusión de *a*) y *b*) no lo sean de igualdad.

II.15. Considérense los sistemas de polinomios $S = (p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ y $T = (q_1(x), q_2(x), q_3(x))$, donde:

$$p_1(x) = 1 + 2x + 5x^2 + 3x^3 + 2x^4$$
$$p_2(x) = 3 + x + 5x^2 - 6x^3 + 6x^4$$
$$p_3(x) = 1 + x + 3x^2 + 2x^4$$

$q_1(x) = 2 + x + 4x^2 - 3x^3 + 4x^4$
$q_2(x) = 3 + x + 3x^2 - 2x^3 + 2x^4$
$q_3(x) = 9 + 2x + 3x^2 - x^3 - 2x^4$

Sean U y V los subespacios, del espacio vectorial de los polinomios reales, que engendran S y T. Hallar la dimensión y una base de cada uno de los subespacios $U + V$ y $U \cap V$.

II.16. Sean $U_1, U_2, ..., U_p$ subespacios de un cierto espacio vectorial V. Compruébese que la suma $U_1 + U_2 + \cdots + U_p$ es directa si y sólo si para cualquier $i = 1, 2, ..., p$ se verifica que:

$$U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_p) = O$$

II.17. Sean U_1 y U_2 los siguientes subespacios del espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$:

$$U_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$
$$U_2 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$$

Analizar si U_1 y U_2 son subespacios suplementarios de $\mathbb{R}^n$ obteniendo la descomposición de cualquier $\bar{u} \in \mathbb{R}$ en suma $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$, con $\bar{u}_1 \in U_1$ y $\bar{u}_2 \in U_2$.

II.18. Sea $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y considérense los conjuntos:

$$U_1 = \{f \in V / f(1) = f(-1) = 0\}$$
$$U_2 = \{f \in V / f \text{ es afín}\}$$

(la función f se dice afín si es $f(x) = a + bx$ para ciertos a y b fijos). Pruébese que U_1 y U_2 son subespacios suplementarios de V.

II.19. Sea $V = \mathcal{C}([0,1]), \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Se pide:

a) Dado un número natural n y si $f \in V$ es una función que toma, al menos, n valores distintos, analizar si las n funciones $f(x)$, $f(x)^2$, $f(x)^3$, ..., $f(x)^n$ forman un sistema linealmente independiente de V.

b) Analizar si U_1 y U_2 son subespacios suplementarios de V, siendo:

$$U_1 = \left\{ f \in V \Big/ \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \right\}$$

y

$$U_2 = \{f \in V / f \text{ es constante}\}$$

II.20. Sean U, V, U_1, U_2, V_1 y V_2 subespacios de un cierto espacio vectorial. Si la suma $U + V$ es directa y si $U = U_1 \oplus U_2$ y $V = V_1 \oplus V_2$, compruébese que la suma $U_1 + U_2 + V_1 + V_2$ es directa.

II.21. Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo tamaño simétricas, compruébese que AB es simétrica si y sólo si $AB = BA$.

II.22. Sea A una matriz $m \times p$ y sea B una matriz $p \times n$. Pruébese que:

1. rang $(AB) \leqslant$ rang A
2. rang $(AB) \leqslant$ rang B

II.23. Sean A y N dos matrices cuadradas de igual tamaño tales que A es invertible, N es mihilpotente (o sea, $N^2 = O$) y N conmuta con A^{-1}. Pruébese que $A + N$ es inversible hallando su matriz inversa. (Indicación: recúrrase a la igualdad $(I + M)^{-1} = I - M + M^2 - M^3 ...$)

II.24. Analícese si el conjunto $\mathcal{M}$ formado por todas las matrices de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

es o no un grupo multiplicativo.

II.25. Sean V y W dos espacios vectoriales reales; sea $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$ una base de V y sea $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ una base de W. Si $f: V \to W$ es la aplicación lineal definida por:

$$f(\bar{e}_1) = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 - 4\bar{u}_3 \qquad f(\bar{e}_3) = 3\bar{u}_1 + \bar{u}_2$$
$$f(\bar{e}_2) = 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2 - 2\bar{u}_3 \qquad f(\bar{e}_4) = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_3$$

se pide hallar:

a) Ecuaciones de f en las bases dadas.

b) Una base de Nuc (f) y otra de Im (f).

II.26. Sea dado un espacio vectorial V de dimensión finita y considérese un endomorfismo $f: V \to V$. Pruébese que, si f y $f \circ f$ tienen igual rango, entonces Nuc $(f) \cap$ Im $(f) = O$.

II.27. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas tiene asociada a la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Hallar la matriz D canónica de equivalencia de A.
b) Hallar unas bases $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y $C = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ respecto de las cuales la matriz de f sea la canónica.
c) Analizar si existe alguna aplicación lineal g tal que alguna de las $f \circ g$ o $g \circ f$ sea la identidad.

II.28. Sea $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación identidad y llamemos $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Se pide:

a) Una base B' de $\mathbb{R}^3$ tal que al referir la aplicación i a B' (base del espacio $\mathbb{R}^3$ de partida) y a B (base del espacio $\mathbb{R}^3$ de llegada), la matriz asociada sea la A que figura al final del enunciado.
b) Una base B'' de $\mathbb{R}^3$ tal que al referir la aplicación i a B (base del espacio $\mathbb{R}^3$ de partida) y a B'' (base del espacio $\mathbb{R}^3$ de llegada), la matriz asociada sea A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

II.29. Sea V el conjunto formado por todas aquellas matrices $A = [a_{ij}]$ cuadradas de tamaño $n \times n$ tales que las sumas de los elementos de cada una de sus filas y de cada una de sus columnas son, todas, iguales; llamaremos a este número $S(A)$:

$$S(A) = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}$$
$$(\forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

a) Analizar si V es un espacio vectorial (con las operaciones usuales) y si $S : V \to \mathbb{R}$, $A \longleftrightarrow S(A)$, es una forma lineal.
b) Llamando J a la matriz $n \times n$ que tiene todos sus elementos iguales a la unidad, pruébese que:

$$[A \in V] \quad \Leftrightarrow \quad [\exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ AJ = JA = \alpha J]$$

Hállese α en función de A.
c) Si $A \in V$ es regular, compruébese que $S(A) \neq 0$ y que $A^{-1} \in V$. Hallar $S(A^{-1})$ en función de $S(A)$.

II.30. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de las matrices reales cuadradas y que conmutan con una cierta matriz dada. Compruébese que $\mathcal{M}$ es un anillo respecto de las operaciones usuales. Suponiendo a partir de ahora que las matrices son de tamaño 2×2 y si la matriz dada es:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (h \text{ parámetro dado})$$

se pide:

1. Expresión general de las matrices de $\mathcal{M}$.
2. Estudiar si en $\mathcal{M}$ hay divisores de cero.
3. Estudiar si $\mathcal{M}$ es un cuerpo.

II.31. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto formado por las matrices reales de tamaño $n \times n$ que son de la forma:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \end{bmatrix}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ recorren $\mathbb{R}$. Se pide:

1. Expresar $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en función de $I = A(1, 0, \ldots, 0)$, de $E = A(0, 1, \ldots, 0)$ y de las potencias de E.
2. Comprobar que $\mathcal{M}$ es un espacio vectorial y hallar una de sus bases.
3. Hallar la matriz inversa de $A(1, 2, 3, \ldots, n)$.

II.32. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del que se sabe que:

$$f(1, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, -1)$$
$$f(1, 0, 1, 0) = (1, 1, 1, 0)$$

Hallar la matriz asociada a f, respecto de las bases canónicas, en cada uno de los siguientes supuestos:

1. Nuc $(f) = $ Im (f).
2. $f \circ f = i$ (identidad).
3. $f \circ f = f$.

II.33. Sean $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$ y $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_5)$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^5$. Considérese la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ definida por:

$$f(\bar{e}_1) = \bar{u}_1 + \bar{u}_3 - \bar{u}_5$$
$$f(\bar{e}_2) = 2\bar{u}_2 - \bar{u}_3 + \bar{u}_4 + 2\bar{u}_5$$
$$f(\bar{e}_3) = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + \bar{u}_4 + \bar{u}_5$$
$$f(\bar{e}_4) = \bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 - \bar{u}_3 + 2\bar{u}_4 + 3\bar{u}_5$$

Se pide:

1. Ecuaciones de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^5$.
2. Ecuaciones de f en la base $(\bar{e}_1 + \bar{e}_2,\ \bar{e}_2 - \bar{e}_3,\ \bar{e}_1 + \bar{e}_3 + \bar{e}_4,\ \bar{e}_3 - \bar{e}_4)$ de $\mathbb{R}^4$ y la canónica de $\mathbb{R}^5$.
3. Hallar bases de Nuc (f) y de Im (f).
4. Hallar un subespacio V de $\mathbb{R}^4$ tal que la restricción de f a V sea inyectiva y tenga la misma imagen que f.

II.34. Sea V el espacio vectorial de los polinomios reales de grados menor o igual que 2; sean:

$$p(x) = 1 + x + x^2 \quad q(x) = 1 + 2x^2 \quad r(x) = x + x^2$$
$$\bar{a} = (2, 0, 1) \quad \bar{b} = (3, 1, 0) \quad \bar{c} = (1, -2, 3)$$

Considérese la aplicación lineal $f: V \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(p(x)) = \bar{a} \quad f(q(x)) = \bar{b} \quad f(r(x)) = \bar{c}$$

1. Hallar la matriz de f respecto de las bases $(1, x, x^2)$ de V y la canónica de $\mathbb{R}^3$.
2. Hallar la matriz de f respecto de las bases $(p(x), q(x), r(x))$ de V y $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Hallar una base B de V, tal que respecto de ella y de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ la matriz de f sea la unidad I (compruébese previamente que ello es posible).

II.35. Dadas las matrices de igual tamaño:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

donde a es el número real para el que A y B son equivalentes:

1. Hallar a.
2. Hallar dos matrices regulares P y Q tales que $B = Q^{-1}AP$.
3. Si es $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal asociada a la matriz A respecto a las bases canónicas, hallar una base B de $\mathbb{R}^4$ y otra base C de $\mathbb{R}^3$ respecto de las que la matriz asociada a f sea B.

II.36. Sea V el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 y considérese la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to V$ en la que (para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$f(1, 1, 1) = 2\beta + \alpha x \quad , \quad f(0, -1, 1) = \alpha x + \beta x^2$$
$$f(0, 0, 1) = \beta + (\alpha - 1)x$$

1. Hallar α y β para que f no sea inyectiva.
2. Hallar bases de Nuc (f) y de Im (f), en función de α y β.
3. Hallar el subespacio imagen por la aplicación f, del $U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a + c = b + c = 0\}$, según los valores de α y β.

II.37. Sean $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ y $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dos aplicaciones lineales tales que:

a) $h = g \circ f$ es la proyección sobre el subespacio $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_2 = y_3\}$ paralelamente al vector $(1, -1, 0)$.

b) $k = f \circ g$ es tal que su núcleo es $\mathrm{Nuc}(k) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_3 = 0,\ x_1 + x_2 = x_4\}$ y además $k(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 2, 1)$ y $k(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 1, 1)$.

En las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, se pide:

1. La matriz de h y sendas bases de Im(h) y de Nuc(h).
2. Matriz de k y sendas bases de Im (k) y Nuc (k).
3. Sabiendo que g es una aplicación sobreyectiva, hallar el núcleo y la imagen de f.

II.38. Sea $f \cdot V \to W$ una aplicación lineal de la que se conoce Im (f) y un subespacio $U \subset V$ de Nuc (f). Si es $\varphi: U \to W$ la restricción de f a U, hallar el Nuc(φ) y la Im(φ).

II.39. Sea V el espacio vectorial real de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales. Considérese las aplicaciones $F: \mathbb{R}^3 \to V$ y $G: V \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$F(a, b, c) = a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x + c$$
$$G(f(x)) = (f(0), f(-\pi/2))$$

1. Comprobar que F y G son lineales y hallar sus núcleos y sus imágenes.
2. Si $U \subset V$ es el subespacio de las funciones constantes, hallar $F^{-1}(U)$.
3. Hallar bases de $\mathbb{R}^3$ y de $F(\mathbb{R}^3)$ respecto de las que la matriz de F sea la canónica (de equivalencia).
4. Hallar la ecuación y el núcleo de la aplicación $G \circ F$.

II.40. Sea $\varphi: V \rightarrow V$ un endomorfismo del espacio vectorial V de dimensión n. Compruébese que los endomorfismos $f: V \rightarrow V$ tales que $\varphi \circ f = o$ forman en conjunto $\mathcal{V}$ que es un espacio vectorial; hallar la dimensión de éste.

II.41. Sea $f: V \rightarrow W$ una aplicación lineal cualquiera entre espacios vectoriales de igual dimensión (finita). Compruébese que f se puede expresar como suma de dos isomorfismos.

II.42. Sea $f: V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita; sea $\dim V = n$ y $\dim W = m$. Pruébese que f es inyectiva si y sólo si existe una aplicación lineal $g: W \rightarrow V$ tal que $g \circ f = i$ (identidad en V).

II.43. Sea $f: V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita; sea $\dim V = n$ y $\dim W = m$. Pruébese que f es sobreyectiva si y sólo si existe una aplicación lineal $g: W \rightarrow V$ tal que $f \circ g = i$ (identidad en W).

II.44. Sea $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo tal que $i + af + bf \circ f = o$, donde i es la identidad en V y a y b son dos escalares dados. Comprobar que f es un automorfismo hallando su inverso.

II.45. Sea $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo en V con $\dim V = n$. Compruébese que $\operatorname{Nuc}(f) = \operatorname{Im}(f)$ si y sólo si n es par, $\operatorname{rang} f = n/2$ y $f \circ f = o$.

II.46. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y sea $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ una base de V. Se considera la forma lineal $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface a:

$$\varphi(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) = 5 \ ; \ \varphi(\bar{e}_2 - \bar{e}_3) = 3 \ ; \ \varphi(\bar{e}_1 + \bar{e}_3) = 4$$

Hallar:

a) La ecuación de φ en la base B.

b) Coordenadas de φ en la base B^*, dual de B.

II.47. Sea $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y considérense tres formas lineales φ, ψ y η, en $\mathbb{R}^3$, de las que se sabe:

- $\varphi(\bar{e}_1) = 1$, $\varphi(\bar{e}_2) = a$, $\varphi(\bar{e}_3) = 0$ ($a \in \mathbb{R}$ dado).
- $\psi(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = 3$, $\psi(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3) = 1$, $\psi(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3) = 2$.
- $\operatorname{Nuc}(\eta) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + bx_3 = 0\}$, $\eta(\bar{e}_1) = 2$ ($b \in \mathbb{R}$ dado).

1. Hallar las ecuaciones de φ, ψ y η en la base B.
2. Hallar las coordenadas de φ, ψ y η en la base B^*, dual de B.
3. Hallar la relación que deben guardar a y b para que (φ, ψ, η) sea un sistema linealmente dependiente de V^*.

II.48. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la siguiente base $B = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$:

$$\bar{u}_1 = (1, -1, 3) \ , \ \bar{u}_2 = (0, 1, -1) \ , \ \bar{u}_3 = (0, 3, -2)$$

Hallar la base dual $B^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ de la base B.

II.49. Sea V el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 1. Sean $\varphi_1: V \rightarrow \mathbb{R}$ y $\varphi_2: V \rightarrow \mathbb{R}$ las formas lineales:

$$\varphi_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx \quad ; \quad \varphi_2(p(x)) = \int_0^2 p(x)\,dx$$

Comprobar que (φ_1, φ_2) es una base del espacio V^*, dual de V, y hallar la base $(p_1(x), p_2(x))$ de V que tiene a (φ_1, φ_2) por dual.

II.50. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $f: V \rightarrow K$ una forma lineal. Compruébese que el subespacio $U = \operatorname{Nuc}(f)$ es máximal de V, o sea, es suplementario de un subespacio unidimensional de V.

II.51. Sea V un espacio vectorial, sobre un cuerpo K, y sea U un subespacio máximal de V, esto es, U es suplementario de un subespacio unidimensional de V. Pruébese que existe una forma lineal $f: V \rightarrow K$ cuyo núcleo es U.

SOLUCIONES

I.1. Indicación: si $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n)$ es una base de V_1 y $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_m)$ es una base de V_2, compruébese que los siguientes vectores forman una base de $V_1 \times V_2$

$$(\bar{u}_1, \bar{o}), (\bar{u}_2, \bar{o}), ..., (\bar{u}_n, \bar{o}), (\bar{o}, \bar{v}_1), (\bar{o}, \bar{v}_2), ..., (\bar{o}, \bar{v}_m)$$

II.2. $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es subespacio de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La función $\operatorname{sen} x$ no es combinación lineal de $1, x, x^2, ..., x^n$ pues aquélla se anula para infinitos valores de x.

II.3. $x_1 = a - b - c + d$, $x_2 = -a + b + c$, $x_3 = a - c$, $x_4 = c$.

II.4. $a = 8$, $b = 9$; $(p_1(x), p_2(x))$ es base, $p_3(x) = 5p_1(x) - 2p_2(x)$.

II.5. $\alpha = 3$.

II.6. La dimensión es 3; una base es la $B = (M_1, M_3, M_5)$; $M_2 = 2M_1$, $M_4 = -M_1 + 2M_3$.

II.7. La relación $a + b$ sen $x + c$ cos $x + d$ sen $2x + e$ cos $2x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ sólo tiene la solución $a = b = c = d = e = 0$ (tómense para x los valores 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, $\pi/4$, por ejemplo). $B = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$. Al añadir a B las funciones sen $2x$ y cos $2x$ se obtiene una base de $\mathscr{V}(S)$.

II.8.

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & \cdots & (-1)^n a^n \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 & \cdots & -(-1)^n \binom{n}{1} a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & -3a & \cdots & (-1)^n \binom{n}{2} a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & -(-1)^n \binom{n}{3} a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Nótese que esta matriz es regular para todo $a \in \mathbb{R}$.

II.9. Recurrir a la base usual. Los dos sistemas son equivalentes y engendran el mismo espacio; una base de éste es la $B = (E_1, E_2, E_3)$, donde:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II.10. El sistema B es base si y sólo si $p(x)$ es de grado n.

II.11. Indicación $\Sigma \lambda_i(AC_i) = A(\Sigma \lambda C_i)$. Recurrir al contrarrecíproco. Si A es regular, de ser $\Sigma \lambda_i(AC_i) = 0$, sería $\Sigma \lambda C_i = A^{-1} \cdot O = O$.

II.12. Recurrir al método de inducción. La relación $\Sigma \lambda_i f_i(x) \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, si se la divide por $f_k(t)$ y, luego, se deriva conduce a la correspondiente relación para $n - 1$ funciones.

II.13. Sean $U = \mathscr{V}(S)$ y $U' = \mathscr{V}(S')$. Los vectores $\bar{u}_i + \bar{u}_i'$ pertenecen a $U + U'$, luego:

$$\text{rang } (\bar{u}_i + \bar{u}_i') \leqslant \dim (U + U') \leqslant$$
$$\leqslant \dim U + \dim U' = \text{rang } S + \text{rang } S'$$

Para el caso de las matrices, recurrir a sus vectores columna (o fila) y aplicar el resultado anterior.

II.14. *a*) Téngase en cuenta que $V \subset V + W$ y que $W \subset V + W$; *b*) téngase en cuenta que $V \supset V \cap W$ y que $W \supset V \cap W$. Contraejemplo: en $\mathbb{R}^2$ tomar:

$$U = \{(t, t)/t \in \mathbb{R}\} \quad V = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$$

y

$$W = \{(0, y)/y \in \mathbb{R}\}$$

II.15. La dimensión de $U + V$ es 3 y una base suya es la $(p_1(x), p_2(x), q_1(x))$. La dimensión de $U \cap V$ es 1 y una base suya es la $(2 + x + 4x^2 - 3x^3 + 4x^4)$.

II.16. Indicación: supóngase que existe $\bar{x} \neq \bar{o}$ en la intersección del enunciado; se puede poner $\bar{x} = x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_p$. Toda suma $\Sigma \bar{u}_i$ se puede entonces poner también en la forma:

$$(\bar{u}_1 + \bar{x}_1) + \cdots + (\bar{u}_{i-1} + \bar{x}_{i-1}) + (\bar{u}_i - \bar{x}) +$$
$$+ (\bar{u}_{i+1} + \bar{x}_{i+1}) + \cdots + (\bar{u}_p + x_p)$$

II.17. $U_1 \cap U_2 = O$. Cualquier $(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^4$ se puede poner:

$$(y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) + (t, t, ..., t)$$

con

$$t = (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) : n \quad \text{y} \quad x_i = y_i - t$$

$(i = 1, 2, ..., n)$.

II.18. $U_1 \cap U_2 = O$. Para cualquier $\varphi \in V$ se puede poner:

$$\varphi(x) = (a + bx) + f(x)$$

donde:

$$a = \frac{1}{2}[\varphi(1) + \varphi(-1)] \quad , \quad b = \frac{1}{2}[\varphi(1) - \varphi(-1)]$$

$f(x) = \varphi(x) - (a + bx)$ es tal que $f(1) = f(-1) = 0$.

II.19. *a)* Es independiente: la relación $\Sigma\, \lambda_i f(x)^i \equiv 0$ implica $\Sigma\, \lambda_i f(x_p)^i = 0$ para los n puntos x_p del enunciado; este sistema sólo tiene la solución nula (su determinante es de Wandermonde).

b) $V = U_1 \oplus U_2$ pues $U_1 \cap U_2 = O$ y todo $\varphi(x) \in V$ se puede poner $\varphi(x) = f(x) + h$ con

$$h = \int_0^1 \varphi(x)\,dx \quad \text{y} \quad f(x) = \varphi(x) - h$$

es tal que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

II.20. Recurrir a que una suma es directa si y sólo si $\bar{o} + \bar{o} + \cdots + \bar{o}$ es la única manera de descomponer $\bar{o}$ en suma de vectores de los subespacios sumandos.

II.21. $AB = BA \Rightarrow (AB)^t = B^tA^t = BA = AB \Rightarrow$
$\Rightarrow AB$ simétrica
AB simétrica $\Rightarrow AB = (AB)^t \Rightarrow AB = B^tA^t = BA$

II.22. Sean $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ y $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ aplicaciones lineales asociadas a A y B.

$$\text{rang}\,(AB) = \dim f(g(\mathbb{R}^n)) \quad , \quad \text{rang}\, A = \dim f(\mathbb{R}^p)$$
$$\text{rang}\, B = \dim g(\mathbb{R}^n)$$
$$g(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^p \Rightarrow 1.^a \quad ; \quad f(g(\mathbb{R}^n)) \subset g(\mathbb{R}^n) \Rightarrow 2.^a$$

II.23. $A + N = A(I + A^{-1}N)$; $(A + N)^{-1} = (I + A^{-1}N)A^{-1}$; tómese $M = A^{-1}N$; $(A + N)^{-1} \doteq A^{-1} - A^{-1}NA^{-1}$

II.24. Si; $I \in \mathcal{M}$; $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow AB^{-1} \in \mathcal{M}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II.25. *a)* $y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$, $y_2 = x_1 + x_2 + x_3$, $y_3 = -4x_1 - 2y_2 + 2x_4$

b) $(1, -2, 1, 0)$ y $(1, -1, 0, 1)$ forman base de Nuc (f)
$(1, 0, 2)$ y $(0, 1, -6)$ forman base de Im (f).

II.26. Si existiese $\bar{a} \neq \bar{o}$ en Nuc (f) y en Im (f), tómese una base de Im (f) que incluya a $\bar{a}$ y hállese una base de Im $(f \circ f)$.

II.27. *a)* $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (1, -1/2, 0)$, $\bar{e}_3 = (5, -4, 1)$
$\bar{u}_1 = (1, 3)$, $\bar{u}_2 = (0, 1)$

c) $g \circ f$ no puede ser la identidad y $f \circ g$ sí lo puede ser. Tómese para $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, por ejemplo, la aplicación que en las bases $(\bar{u}_i)$ y $(\bar{e}_j)$ tiene por matriz a la traspuesta de D.

II.28. *a)* $B' = (\bar{e}_3, \bar{e}_2, -\bar{e}_1)$.
b) $B'' = (-\bar{e}_3, \bar{e}_2, \bar{e}_1)$.

II.29. *a)* V es subespacio de $\mathcal{M}_{n \times n}$; S es forma lineal ya que $S(\lambda A + \mu B) = \lambda S(A) + \mu S(B)$. *b)* $\alpha = S(A)$. *c)* El rango de A no se altera al sumar a una de sus filas todas las demás; en $AA^{-1} = I$ y $A^{-1}A = I$ multiplicar por J y recurrir a la propiedad anterior; $S = (A^{-1}) = 1 : S(A)$.

II.30. 1. $\begin{bmatrix} \alpha & -h\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$

2. Si $h > 0$, no hay; si $h \leqslant 0$, los divisores de cero se obtienen para $\alpha = \pm\, \beta\sqrt{-h}$.
3. Es cuerpo si $h \leqslant 0$.

II.31. 1. $A(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x_1 I + x_2 E + x_3 E^2 + \cdots + x_n E^{n-1}$.
2. $\mathcal{M}$ tiene dimensión n; una de sus bases está formada por $A(1, 0, \ldots, 0)$, $A(0, 1, \ldots, 0)$, ..., $A(0, 0, \ldots, 1)$.
3. $A(1, -2, 1, 0, \ldots, 0)$.

II.32. 1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

II.33. 1. $y_1 = x_1 + x_3 + x_4$

$y_2 = 2x_2 + 2x_3 + 4x_4$

$y_3 = x_1 - x_2 - x_4$

$y_4 = x_2 + x_3 + 2x_4$

$y_5 = -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4$

2. $y_1 = x'_1 - x'_2 + 3x'_3$

$y_2 = 2x'_1 + 6x'_3 - 2x'_4$

$y_3 = -x'_2 + x'_4$

$y_4 = x'_1 + 3x'_3 - x'_4$

$y_5 = x'_1 + x'_2 + 3x'_3 - 2x'_4$

3. $(-1, -1, 1, 0)$ y $(-1, -2, 0, 1)$ forman base de Nuc (f)
$(1, 0, 1, 0, -1)$ y $(1, 2, 0, 1, 1)$ forman base de Im (f)

4. $V = \{(\alpha, \beta, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

II.34. 1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. En V la nueva base $\left(\frac{3}{7} + \frac{1}{7}x + \frac{4}{7}x^2,\right.$

$\left.-\frac{2}{3} - \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}x^2, \frac{1}{7} + \frac{5}{7}x - \frac{1}{7}x^2\right)$

II.35. 1. $a = 1$

2. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. B: $(1, 0, 0, 0)$, $(2, 0, 0, -1)$, $(-2, 1/2, 0, 0)$, $(-6, 0, 1, 4)$

C: $(1/2, 2, 1)$, $(0, -2, -1)$, $(0, 1/2, 0)$

II.36. 1. $\alpha = 2$ o $\beta = 0$

2. Si $\alpha \neq 2$ y $\beta \neq 0$, Im $(f) = V$ y Nuc $(f) = 0$
Si $\alpha = 2$ y $\beta \neq 0$,
Im $(f) = \mathcal{V}(2x + \beta x^2, \beta + x)$,
Nuc $(f) = \mathcal{V}(1, 1, -1)$
Si $\beta = 0$, Im $(f) = \mathcal{V}(x)$,
Nuc $(f) = \mathcal{V}((1, 2, 0), (0, \alpha - 1, 1))$

3. Si $\alpha \neq 2$, $f(S) = \mathcal{V}(x)$; si $\alpha = 2$, $f(S) = 0$.

II.37. 1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nuc $(h) = \mathcal{V}(1, -1, 0)$

Im $(h) = \mathcal{V}((0, 1, 1), (1, 0, 0))$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Nuc $(k) = \mathcal{V}((1, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1))$

Im $(k) = \mathcal{V}((1, 1, 2, 1), (1, 0, 1, 1))$

3. Im (f) = Im (k), Nuc (f) = Nuc (h)

II.38. Nuc $(\varphi) = O$, Im (φ) = Im (f)

II.39. 1. Nuc $(F) = \{(a, a, -a) \in \mathbb{R}^3 / a \in \mathbb{R}\}$,
Im $(F) = \{\alpha + \beta \operatorname{sen}^2 x / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
Nuc $(G) = \{f \in V / f(0) = f(-\pi/2) = 0\}$,
Im $(G) = \mathbb{R}^2$

2. $F^{-1}(U) = \{(a, a, c) \in \mathbb{R}^3 / a, c \in \mathbb{R}\}$

3. En $\mathbb{R}^3$: $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(-1, -1, 1)$.
En $F(\mathbb{R}^3)$: $\operatorname{sen}^2 x$, 1

4. $(G \circ F)(a, b, c) = (b + c, -a + c)$,
$\text{Nuc } (G \circ F) = \{(a, -a, a) \in \mathbb{R}^3 / a \in \mathbb{R}\}$

II.40. Nótese que $f \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \text{Im } (f) \subset \text{Nuc } (\varphi)$. El espacio $\mathcal{V}$ es isomorfo al $\mathcal{L}(V, \text{Nuc } (\varphi))$, luego tiene dimensión $n \cdot d$, donde d es la dimensión de Nuc (φ).

II.41. Tómense bases en las que la matriz de f es la canónica (de equivalencia) C_r. Póngase $C_r = 2I + (C_r - 2I)$, donde I es la unidad $n \times n$; $2I$ y $C_r - 2I$ son regulares.

II.42. Tómense en V y W bases en las que la matriz de f es la canónica (de equivalencia) C_r; f inyectiva si y sólo si $r = n$. Si $r = n$, g puede ser el homomorfismo de matriz C_r^t. Si $g \circ f = i$, la matriz de f no puede tener una columna nula, luego $r = n$.

II.43. Como en el ejercicio anterior, recurramos a C_r; f es sobreyectiva si y sólo si $r = n$. Si $r = m$, g puede ser el homomorfismo de matriz C_r^t. Si $f \circ g = i$, la matriz de f no puede tener una fila nula, luego $r = m$.

II.44. Buscando f^{-1} de la forma $\alpha i + \beta f$, se obtiene $f^{-1} = -a - bf$.

II.45. Recuérdese que dim Nuc (f) + dim Im $(f) = n$ y que $f \circ f = o$ equivale a Im $(f) \subset$ Nuc (f).

II.46. *a*) $\varphi(x, y, z) = 6x + y - 2z$
b) Coordenadas de $\varphi = (6, 1, -2)$

II.47. 1. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + ax_2$
$\psi(x_1, x_2, x_3) = 3x_2 + x_3$
$\eta(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2 + 2bx_3$
2. $\varphi : (1, a, 0)$, $\psi : (0, 3, 1)$, $\eta : (2, 2, 2b)$
3. $a + 3b = 1$

II.48. $\varphi_i(\bar{u}_j) = 1$, si $i = j$; $\varphi_i(\bar{u}_j) = 0$, si $i \neq j$

$$\varphi_1(x, y, z) = x \quad , \quad \varphi_2(x, y, z) = 7x - 2y - 3z$$
$$\varphi_3(x, y, z) = -2x + y + z$$

II.49. $p_1(x) = 2 - 2x$, $p_2(x) = -(1/2) + t$.

II.50. Como $f \neq o$, existe $\bar{v}_0 \in V$ tal que $f(\bar{v}_0) \neq 0$; se verifica que $\mathcal{V}(\bar{v}_0) \oplus U = V$.

II.51. Se sabe que existe $\bar{v}_0 \in V$ tal que $\mathcal{V}(\bar{v}_0) \oplus U = V$; para cada $\bar{x} \in V$, existen unos únicos $\lambda \in K$ y $\bar{u} \in V$ tales que $\bar{x} = \lambda \bar{v}_0 + \bar{u}$. Tómese $f(\bar{x}) = \lambda$.

Ejercicios y problemas a la parte III

ENUNCIADOS

III.1. Sea $f: V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, en un espacio vectorial real V. Compruébese que f es alternada si, y sólo si, f es antisimétrica, sabiendo que:

- f se dice alternada si $f(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ para todo $\bar{x} \in V$.
- f se dice antisimétrica si $f(\bar{x}, \bar{y}) = -f(\bar{y}, \bar{x})$ para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in V$.

III.2. Sea $f: V \times V \to K$ una forma bilineal, en el espacio vectorial V de dimensión n sobre el cuerpo K. Sea $A = [a_{ij}]$ la matriz de f en una base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$ de V. Determinar las transformaciones que se producen en la matriz A cuando en la base dada se realizan las siguientes manipulaciones:

1. Multiplicar $\bar{e}_1$ por $\lambda \neq 0$.
2. Permutar entre sí los vectores $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$.
3. Sumar a $\bar{e}_1$ el vector $\lambda\bar{e}_2$.

III.3. Sea $f: V \times V \to K$ una forma bilineal, en el espacio vectorial V sobre un cuerpo K. Sea $C \subset V$ un conjunto cualquiera de vectores y considérense los nuevos conjuntos C_1 y C_2 siguientes:

$$C_1 = \{\bar{u} \in V / f(\bar{x}, \bar{u}) = 0, \ \forall \bar{x} \in C\}$$

y

$$C_2 = \{\bar{u} \in V / f(\bar{u}, \bar{x}) = 0, \ \forall \bar{x} \in C\}$$

1. Pruébese que C_1 y C_2 son subespacios de V.
2. Si $D \subset V$ es tal que $C \subset D$, hallar las relaciones de inclusión que hay entre C_1 y D_1 y entre C_2 y D_2.
3. Hallar C_1 y C_2 si $C = O$.

III.4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K y sea $f: V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica ordinaria (no degenerada). Dada una aplicación lineal $\varphi: V \to V$, pruébese que existe una aplicación lineal $\varphi^*: V \to V$ tal que $f(\varphi(\bar{x}), \bar{y}) = f(\bar{x}, \varphi^*(y))$ para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in V$.

Si $\psi: V \to V$ es otro endomorfismo, hallar (en función de φ^* y de ψ^*):

$$(\varphi \circ \psi)^* \qquad (\lambda\varphi + \mu\psi)^* \qquad (\varphi^*)^*$$

III.5. Sea $\omega: V \to K$ una forma cuadrática, en un espacio vectorial V sobre el cuerpo K. Si f es la forma polar de ω, compruébese que para cualesquiera vectores $\bar{u}, \bar{v} \in V$ se verifica que:

$$4f(\bar{u}, \bar{v}) = \omega(\bar{u} + \bar{v}) - \omega(\bar{u} - \bar{v})$$
$$2[\omega(\bar{u}) + \omega(\bar{v})] = \omega(\bar{u} + \bar{v}) + \omega(\bar{u} - \bar{v})$$

III.6. Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y considérese la aplicación $\omega: V \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\omega(\varphi) = \int_{-a}^{a} \varphi(x + b)\varphi(x - b)\, dx$$

($a, b \in \mathbb{R}$ dados). Se pide:

1. Comprobar que ω es una forma cuadrática, hallando su forma polar.
2. Si V fuese el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos, hallar la matriz A de ω en la base $(1, x, x^2)$.
3. En el supuesto del apartado anterior y si $a = \sqrt{3}$ y $b = 1$, hallar el núcleo de ω y diagonalizarla.

III.7. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K; sea $\varphi: V \to V$ una aplicación lineal; sea $\omega: V \to K$ una forma cuadrática. Comprobar que $\omega \circ \varphi$ es una forma cuadrática. Si V tiene dimensión finita, hállese la matriz de $\omega \circ \varphi$, respecto de una cierta base de V, en función de las matrices M y A de φ y ω, en dicha base. ¿Qué hay que exigir a φ y ω para que $\omega \circ \varphi$ sea regular?

III.8. Sea $\omega: V \to K$ una forma cuadrática, en un espacio vectorial V sobre el cuerpo K. Sea $\bar{u} \in V$ un vector que no pertenece al núcleo de ω. Demuéstrese que existe algún vector $\bar{v} \in V$ tal que el subespacio $\mathscr{C}(\bar{u})$, conjugado de $\bar{u}$, es suplementario del $\mathscr{V}(\bar{v})$, engendrado por $\bar{v}$.

III.9. Sea $\omega: V \to K$ una forma cuadrática, en un espacio vectorial V sobre el cuerpo K; sea $D \subset V$ un conjunto cualquiera de vectores. Pruébese que el conjunto D^c, que forman los vectores que son conjugados de todos los vectores de D, es un

subespacio vectorial (que se llama subespacio conjugado de D).

III.10. Sea $\omega: K^n \to K$ una forma cuadrática no nula. Compruébese que $\omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ se puede expresar como producto de dos expresiones lineales si, y sólo si, su matriz (en base canónica) tiene rango unidad.

III.11. Sea V el espacio vectorial real de las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$. Considérese la aplicación $f: V \times V \to \mathbb{R}$ siguiente:

$$(M, N) \longmapsto f(M, N) = \text{traza } (MN) - (\text{traza } M)\ (\text{traza } N)$$

1. Probar que f es una forma bilineal simétrica.
2. Para $n = 2$, hallar la forma cuadrática $\omega: V \to \mathbb{R}$ asociada a f, determinando la expresión de $\omega(M)$ para

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

3. Para $n = 2$, hallar la matriz A asociada a ω en la base cuyos elementos son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Para $n = 2$, hallar el subespacio de V formado por las matrices conjugadas, respecto de ω, de todas las matrices antisimétricas de V.

III.12. Sea V el espacio vectorial de los polinomios reales $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ de grado menor o igual que dos y considérese la aplicación $\omega: V \to \mathbb{R}$, $\omega(p(x)) = p(\alpha)p(\beta)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son dados. Se pide:

1. Probar que ω es una forma cuadrática, hallando su forma polar.
2. Hallar la matriza A en la base $(1, x, x^2)$ de V.
3. Relación entre α y β para que 1 y x sean conjugados respecto de ω.
4. En el supuesto del apartado anterior, hallar el núcleo de ω y diagonalizarla.

III.13. Sea $\omega: V \to \mathbb{C}$ una forma cuadrática, en el espacio vectorial complejo V de dimensión finita. Pruébese que existe alguna base de V en la que la matriz $D = [d_{ij}]$ de ω es diagonal y tiene

$$d_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \leq r \\ 0, & \text{si } i > r \end{cases} \quad (r = \text{rang } \omega)$$

III.14. De una forma cuadrática $\omega: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se sabe que

- Los vectores $(0, 1, 0)$ y $(0, 1, -1)$ son conjugados respecto de ω.
- $(-1, 0, 1)$ es un vector del núcleo de ω.
- $\omega(1, 0, 0) = 1$.
- La traza de la matriz A de ω en la base canónica vale 0.

1. Hallar la matriz A.
2. Hallar la expresión canónica de ω obteniendo, también, la base en la que se consigue.

III.15. Se considera la forma cuadrática $\omega: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que tiene por expresión (en la base canónica) a:

$$\omega(x, y, z) = \alpha x^2 + (\alpha + 3)y^2 + (\alpha + 2)z^2 + 2(\alpha + 1)xy + 2xz + 4yz$$

1. Diagonalizar ω, determinando la base de la diagonalización que se obtenga, para los distintos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Hallar el núcleo de ω, en función de α.
3. Para $\alpha = -1$, comprobar que los vectores autoconjugados respecto de ω forman dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.
4. Para $\alpha = -1$, expresar ω en una base formada por vectores autoconjugados respecto de ω.

III.16. Sea $\varphi: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal que, respecto de la base canónica, tiene asociada la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ dado})$$

1. Compruébese, hallando su matriz A (simétrica), que $\omega: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $\omega(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}, \bar{x})$ es una forma cuadrática.
2. Hallar el núcleo de ω, en función de α.
3. Diagonalizar ω, obteniendo la base de la diagonalización que se de.
4. Para $\alpha = 4$, hallar una base de $\mathbb{R}^4$ en la que la matriz de ω tiene nulos todos los elementos de su diagonal; hallar también la expresión de $\omega(\bar{x})$ en esta base.

III.17. Se dice que una forma cuadrática real $\omega: V \to \mathbb{R}$ (donde V es un espacio vectorial real cualquiera)

es definida si para todo vector $\bar{x} \neq \bar{o}$ de V es $\omega(\bar{x}) \neq 0$. Demuéstrese que si ω es definida, entonces ω es definida positiva o es definida negativa.

III.18. Sea M una matriz cuadrada regular. Pruébese que M^tM es una matriz simétrica definida positiva.

III.19. Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Hallar una condición necesaria y suficiente para que A se pueda poner en la forma $A = MM^t$ para cierta matriz regular M.

III.20. Sea $\omega: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática no nula que, en base canónica tiene la expresión:

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

con $a_{11} \neq 0$ $(a_{ij} = a_{ji})$. Hallar un cambio de coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n) \longleftrightarrow (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de manera que

$$\omega(y_1, y_2, \dots, y_n) = a_{11}y_1^2 + \omega_1(y_2, \dots, y_n)$$

con ω_1 cuadrática. Si fuese $a_{11} = 0$, dese un cambio de coordenadas de modo que el nuevo elemento de lugar 11 no sea nulo.

III.21. Sea $\omega: V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática, en el espacio vectorial real V, y sea f la forma polar de ω. Demuéstrese que si ω es definida positiva, entonces para cualesquiera $\bar{u}, \bar{v} \in V$ si verifica que:

$$f(\bar{u}, \bar{v})^2 \leqslant \omega(\bar{u})\omega(\bar{v})$$

(desigualdad de Schwarz).

III.22. Sea V el espacio vectorial de las matrices cuadradas de tamaño 2×2 y considérese en él la base usual, esto es, la formada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compruébese que, para cualquiera que sea $c \in \mathbb{R}$, la aplicación $f: V \times V \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(M, N) = c\ (\text{traza } MN) - (\text{traza } M)(\text{traza } N)$$

es bilineal simétrica y:

1. Hallar la matriz A de f en la base dada.
2. Diagonalizar ω, según los valores de c, obteniendo la base en la que ω adopte la forma diagonal que se obtenga.
3. Estudiar, en función de c, si ω es definida o semidefinida.

III.23. Sea $\omega: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática que, en la base canónica, tiene por expresión a:

$$\omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + \alpha x_2^2 + 2x_3^2 + \alpha x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4$$

Se pide, en función del valor que tome el parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. Diagonalizar ω.
2. El rango y la signatura de ω.
3. Estudiar si ω es definida o semidefinida.

III.24. Determínense los valores $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (2x - y + z)(2x' - y' + z') + \alpha(xx' + yy' + zz')$$

define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Para $\alpha = 1$, hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (respecto del anterior producto escalar).

III.25. Hallar la relación que han de verificar los números reales α y β para que

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 2^{\alpha^2}x_1y_1 + 2^{\alpha\beta}(x_1y_2 + x_2y_1) + 2^{\beta^2}x_2y_2$$

donde

$$\bar{x} = (x_1, x_2) \quad \text{e} \quad \bar{y} = (y_1, y_2)$$

determine un producto escalar en $\mathbb{R}^2$. Para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, hallar la matriz métrica G de este producto escalar en la base $(\bar{u}, \bar{v})$ con $\bar{u} = (1, 1)$ y $\bar{v} = (1, -1)$.

III.26. Sea V el espacio vectorial de las funciones reales definidas y continuas en el intervalo $[0, 1]$; en V se considera el producto escalar definido mediante

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

1. Hallar el valor de $(f|g)$ si f y g son las funciones dadas por:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

y

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$$

2. Hallar un subespacio de dimensión $n \in \mathbb{N}$ de V que sea ortogonal a la función $f_0 \in V$ definida por $f_0(x) = x^n$.

III.27. Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y sea $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n)$ una base cualquiera de V. Hallar, en esta base, la matriz métrica G del producto escalar con el que la nueva base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$ es ortonormal, siendo

$$\bar{e}_1 = \bar{u}_1,\ \bar{e}_2 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2,\ \bar{e}_3 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3,\ ...,\ \bar{e}_n = \\ = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \cdots + \bar{u}_n$$

III.28. En un espacio vectorial V y respecto de una cierta base suya $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, se define un producto escalar mediante

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1y_1 + \alpha x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - \\ - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

$$\bar{x} = x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3 \quad , \quad \bar{y} = y_1\bar{u}_1 + y_2\bar{u}_2 + y_3\bar{u}_3$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es el menor número natural posible. Se pide:

1. Hallar α.
2. Hallar un vector $\bar{a} \in V$ que forme ángulos iguales con los vectores de la base dada.
3. Hallar una base ortonormal $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ con la misma orientación que la base dada y tal que:
   - $\bar{e}_1$ tenga la dirección de $\bar{a}$ y sus coordenadas sean positivas.
   - $\bar{e}_2$ tenga iguales sus segunda y tercera coordenadas.
   - $\bar{e}_3$ tenga su primera coordenada positiva.

III.29. Sea V el espacio vectorial de los polinomios reales con una indeterminada, x, de grado menor o igual que dos, en el que se considera la base usual $(1, x, x^2)$. Considérese la aplicación $f: V \times V \to \mathbb{R}$,

$$f[p(x), q(x)] = \\ = \int_{-1}^{1} [ap(x)q(x) + bp'(x)q(x) + c(q'(x)p(x)] \, dx$$

donde $p'(x)$ denota al polinomio derivado de $p(x)$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$ son fijos. Se pide:

1. Comprobar que f es una forma bilineal, determinando su matriz G en la base usual.
2. Hallar las relaciones entre a, b y c para que $p(x) * q(x) = f[p(x), q(x)]$ sea un producto escalar.
3. Para $a = 2$ y $b = c = 1/3$, hallar el subespacio U ortogonal al polinomio x, hallar una base ortogonal de U y hallar la proyección ortogonal sobre U del polinomio x^2.

III.30. En un espacio vectorial real V de dimensión 3, se considera una cierta base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Hallar la matriz métrica G de un producto escalar definido en V del que se sabe que:

- $\|\bar{e}_1\| = \sqrt{2}$ y $\|\bar{e}_2\| = \sqrt{3}$.
- $U = \{x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 \in V / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ es ortogonal a $\mathscr{V}(\bar{e}_1)$.
- La proyección ortogonal de $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ sobre $\bar{e}_2$ es $3\bar{e}_2$.

(Póngase la solución en función de cuantos parámetros se precise.)

III.31. En el espacio vectorial euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$, sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación resultante de aplicar, sucesivamente, la rotación de ángulo α alrededor de $\mathscr{V}(0, 0, 1)$, la simetría ortogonal respecto de $\mathscr{V}((1, 0, 0), (0, 1, 1))$ y la homotecia de razón $k \in \mathbb{R}$. Se pide:

1. Matriz A de f en la base canónica.
2. Los vectores que son proporcionales a sus transformados.

III.32. Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional y sea $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ una base de la que se sabe que:

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 1,\ \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = 1,\ \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 = 2,\ \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$$

$$\bar{a} = 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3 \text{ es ortogonal a } \bar{e}_1 \text{ y a } \bar{e}_3.$$

1. Hallar la matriz métrica G del producto escalar en la base dada.
2. Calcular una base ortonormal $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, …)$ de V.
3. Si $f: V \to V$ es la transformación definida por

$$3f(\bar{u}_1) = 2\bar{u}_1 - 2\bar{u}_2 + \bar{u}_3$$
$$3f(\bar{u}_2) = a\bar{u}_1 + \bar{u}_2 - 2\bar{u}_3$$
$$3f(\bar{u}_3) = b\bar{u}_1 + c\bar{u}_2 + 2\bar{u}_3$$

calcular los números reales a, b y c sabiendo que f es ortogonal. Hallar el ángulo que forman los vectores $f(\bar{e}_1)$ y $f(\bar{e}_2)$ y la matriz A en f en la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

III.33. Sea V un espacio vectorial euclídeo y sean U_1 y U_2 subespacios suplementarios de V. En U_1 hay definido un producto escalar $(*)$; en U_2 hay definido otro producto escalar $(\circ)$. Pruébese que existe un único producto escalar en V cuyas restricciones a U_1 y U_2 son los anteriores productos ($*$ y $\circ$) y que convierte a U_1 y U_2 en subespacios ortogonales.

III.34. En el espacio vectorial euclídeo canónico $\mathbb{R}^5$, se considera el subespacio U que forman los $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ que verifican a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Hallar una base ortonormal de U y otra del subespacio $U^\perp$, suplementario ortogonal de U. Hallar también las proyecciones ortogonales de $\bar{a} = (1, 0, 0, 0, 0)$ sobre U y sobre $U^\perp$.

III.35. En el espacio vectorial euclídeo canónico $\mathbb{R}^4$, se considera el subespacio

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_4 = x_2 + x_3\}$$

1. Hallar una base ortogonal de U.
2. De entre todos los vectores unitarios $\bar{a}$ que forman ángulo de 60° con $(1, 0, 0, 0)$ y con $(0, 1, 0, 0)$, hallar aquellos cuya proyección sobre U tiene la menor norma posible.

III.36. Sea V un espacio vectorial euclídeo, en el que se consideran dos subespacios cualesquiera U_1 y U_2. Se pide hallar las relaciones de inclusión que existen entre los siguientes subespacios:

1. $(U_1 + U_2)^\perp$ y $U_1^\perp \cap U_2^\perp$.
2. $(U_1 \cap U_2)^\perp$ y $U_1^\perp + U_2^\perp$.
3. $(U_1 \cap U_2)^\perp$ y $U_1^\perp + U_2^\perp$ si V tiene dimensión finita.

III.37. Sea V el espacio vectorial de las funciones reales definidas y continuas en el intervalo $[0, 2\pi]$, en el que se considera el producto escalar

$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

Considérense las siguientes funciones $f_p \in V$ (para $p = 0, 1, ..., 2n$):

$$f_0(x) = a_0,\ f_1(x) = a_1 \text{ sen } x,\ f_2(x) = a_2 \cos x$$
$$f_3(x) = a_3 \text{ sen } 2x,\ f_4(x) = a_4 \cos 2x,\ ...,$$
$$f_{2n-1}(x) = a_{2n-1} \text{ sen } nx,\ f_{2n}(x) = a_{2n} \cos nx,\ (a_p \neq 0)$$

1. Comprobar que el sistema que forman estas funciones es ortogonal y hallar los coeficientes a_p para que sea ortonormal.
2. Hallar la proyección ortogonal sobre el subespacio que engendran dichas funciones de cada una de las dos funciones:

$$\varphi(x) = x \quad \text{y} \quad \psi(x) = x^2$$

III.38. Sea $f: V \to W$ una aplicación entre los espacios vectoriales euclídeos V y W. Compruébese que si f conserva el producto escalar, entonces f es lineal.

III.39. Sea $f: V \to W$ una aplicación entre los espacios vectoriales euclídeos V y W. Compruébese que si f es lineal y conserva las normas, entonces f conserva el producto escalar.

III.40. En el espacio vectorial V de las funciones continuas de $[-1, 1]$ en $\mathbb{R}$, considérense los dos productos escalares:

1. $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$
2. $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)g(x)\,dx.$

Sea $F: V \to V$ la aplicación lineal definida por $F(f)(x) = xf(x)$ para $x \in [0, 1]$. Se pide:

1. Comprobar que $\langle , \rangle$ es efectivamente un producto escalar.
2. Analizar si F es una aplicación ortogonal del espacio euclídeo $(V, \langle , \rangle)$ en el $(V, (|))$.
3. Analizar si f es una aplicación biyectiva.

III.41. Sea V el espacio vectorial euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$; sea $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea W el espacio vectorial de las matrices reales de tamaño 3×3, en el que se considera el producto escalar:

$$\langle A, B\rangle = \tfrac{1}{2} \text{ traza } (AB^t)$$

1. Analizar si existe alguna aplicación ortogonal

$f: V \to W$ tal que $f(\bar{e}_1) = M_1$, $f(\bar{e}_2) = M_2$ y $f(\bar{e}_3) = M_3$, siendo

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Obtener la expresión de $f(x, y, z)$.

III.42. En el espacio vectorial euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$, se considera un subespacio U; sea $U^\perp$ el suplementario ortogonal de U.

1. Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación ortogonal, analizar si $f(U^\perp)$ es el suplementario ortogonal de $f(U)$.
2. Si $f_1: U \to U$ y $f_2: U^\perp \to U^\perp$ son dos transformaciones ortogonales, comprobar que existe una y sólo una transformación ortogonal $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que sus restricciones a U y a $U^\perp$ son f_1 y f_2, respectivamente.

III.43. Sea V_2 un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2 y sean $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \in V_2$ tales que cada dos son independientes y $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = \bar{o}$. Se considera un endomorfismo $f: V_2 \to V_2$ tal que $\|f(\bar{a}_i)\| = \|\bar{a}_i\|$ para $i = 1, 2, 3$. Pruébese que:

1. $f(\bar{a}_i) \cdot f(\bar{a}_j) = \bar{a}_i \cdot \bar{a}_j$ para $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$.
2. f es una transformación ortogonal.

III.44. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el giro de 60° alrededor de la recta generada por el vector $\bar{u} = (1, 1, 1)$. Hallar:

1. $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2)$ y $f(\bar{e}_3)$, siendo $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
2. La matriz A de f en la base canónica, comprobando que es ortogonal directa.
3. La matriz B de f en cualquier base ortonormal $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ en la que $\bar{u}_3$ tenga la dirección y el sentido de $\bar{u} = (1, 1, 1)$.
4. El ángulo θ que debe formar un vector $\bar{v}$ con el vector $\bar{u} = (1, 1, 1)$ para que $\bar{v}$ y $f(\bar{v})$ formen un ángulo α dado, ¿cómo debe de ser α para que exista solución?

III.45. En el espacio vectorial euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$, se considera el endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que, respecto de la base canónica, tiene por matriz a la

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

1. Comprobar que f es una transformación ortogonal, analizando si es directa o inversa.
2. Hallar los vectores $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(\bar{u}) = \pm\bar{u}$.
3. Comprobar que f es producto de una rotación por una simetría respecto del plano ortogonal al eje de la rotación; hallar la simetría y la rotación.

III.46. Sabiendo que la siguiente matriz es ortogonal y que a y x son positivos, completar dicha matriz

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 & a & x \\ 1/2 & 1/6 & b & y \\ 1/2 & 1/2 & 0 & z \\ 1/2 & -5/6 & 0 & t \end{bmatrix}$$

III.47. Sea $f: V_3 \to V_3$ una transformación ortogonal, en el espacio vectorial euclídeo V_3, de dimensión 3. Si la ecuación $f(\bar{u}) = \bar{u}$ no se verifica para ningún $\bar{u} \in V_2$, pruébese que entonces f no es una rotación, pero sí lo es $f^2 = f \circ f$. Describir f^2 en función de f. Analizar si, para algún $n \in \mathbb{N}$, la transformación $f^n = f \circ f \circ \overset{n}{\cdots} \circ f$ puede ser la identidad.

III.48. Si $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son vectores de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 orientado, demostrar que se verifica la siguiente relación (doble producto vectorial):

$$\bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{u}$$

III.49. Si $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son tres vectores de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 orientado, demostrar que se verifica la siguiente relación (identidad de Jacobi):

$$\bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w}) + \bar{v} \wedge (\bar{w} \wedge \bar{u}) + \bar{w} \wedge (\bar{u} \wedge \bar{v}) = \bar{o}$$

III.50. Si $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son tres vectores de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 orientado, comprobar que para el producto mixto $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$ se verifica que:

$$[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] = \begin{vmatrix} \|\bar{u}\|^2 & \bar{v} \cdot \bar{u} & \bar{w} \cdot \bar{u} \\ \bar{u} \cdot \bar{v} & \|\bar{v}\|^2 & \bar{w} \cdot \bar{v} \\ \bar{u} \cdot \bar{w} & \bar{v} \cdot w & \|\bar{w}\|^2 \end{vmatrix}$$

III.51. Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ dos vectores del espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 orientado V_3. Sea $f: V_3 \to V_3$ una transformación ortogonal. Hallar $f(\bar{u}) \wedge f(\bar{v})$ en función de $\bar{u} \wedge \bar{v}$.

III.52. Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ dos vectores de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 orientado. Demostrar que:

$$\|\bar{u} \wedge \bar{v}\|^2 + (\bar{u} \cdot \bar{v})^2 = \|\bar{u}\|^2\|\bar{v}\|^2$$

III.53. En un espacio vectorial euclídeo V tridimensional, se considera la rotación $f: V \to V$ alrededor de la recta R engendrada por un cierto vector unitario $\bar{e}$ y de ángulo θ. Se pide:

1. Hallar la imagen $f(\bar{u})$ de un vector $\bar{u}$ ortogonal a $\bar{e}$.
2. Hallar la imagen $f(\bar{u})$ de un vector cualquiera $\bar{x} \in V$.
3. Si V es el espacio canónico $\mathbb{R}^3$, si $\theta = 45°$ y si $R = \mathcal{V}(2, 1, -2)$, hallar $f(\bar{x})$, donde $\bar{x}$ es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$.

SOLUCIONES

III.1. Recúrrase a que $f(\bar{x}+\bar{y},\ \bar{x}+\bar{y})=0$ para cualesquiera $\bar{x},\ \bar{y}\in V$.

III.2. 1. Las primeras fila y columna de A quedan multiplicadas por λ (a_{11} pasa a $\lambda^2 a_n$).
2. Se permutan entre sí las primera y segunda fila y, también, las primera y segunda columnas.
3. A la primera fila se le suma λ veces la segunda y a la primera columna se le suma λ veces la segunda.

III.3. $C_1\supset D_1,\ C_2\supset D_2,\ C_1=C_2=V.$

III.4. Tómese una base en V; sea A la matriz de ω; sean $M,\ M^*,\ N$ y N^* las matrices de $\varphi,\ \varphi^*,\ \psi$ y ψ^*. Es:

$$M^*=A^{-1}M^tA \quad,\quad (MN)^*=N^*M^*$$
$$(\lambda M+\mu N)^*=\lambda M^*+\mu N^* \quad (M^*)^*=M$$
$$(\varphi\circ\psi)^*=\psi^*\circ\varphi^* \quad (\lambda\varphi+\mu\psi)^*=\lambda\varphi^*+\mu\psi^*$$
$$(\varphi^*)^*=\varphi$$

III.5. Recúrrase a que $\omega(\bar{u}\pm\bar{v})=\omega(\bar{u})+\omega(\bar{v})\pm 2f(\bar{u},\ \bar{v})$.

III.6 1. $f(\varphi,\ \psi)=$

$$\tfrac{1}{2}\int_{-a}^{a}[\varphi(x+b)\psi(x-b)+\varphi(x-b)\psi(x+b)]\,dx$$

2.
$$A=\begin{bmatrix} 2a & 0 & \frac{2}{3}a^3+2ab^2\\ 0 & \frac{2}{3}a^3-2ab^2 & 0\\ \frac{2}{3}a^3+2ab^2 & 0 & \frac{2}{5}a^5+2ab^4\end{bmatrix}$$

3. $N(\omega)=\mathcal{V}(x)$
Diagonal $(2\sqrt{3},\ 0,\ -12\sqrt{3/5})$
Base de diagonalización $(1,\ x,\ -2+x^2)$

III.7. M^tAM; para que $\omega\circ\varphi$ sea regular es necesario y suficiente que φ sea biyectiva (automorfismo) y ω sea regular.

III.8. Existe $\bar{v}$ no conjugado de $\bar{u}$. Para cualquier $\bar{x}\in V$, póngase $\bar{x}=\lambda\bar{v}+(\bar{x}-\lambda\bar{v})$ y hállese $\lambda\in K$ para que $\bar{x}-\lambda\bar{v}$ sea conjugado de $\bar{x}$.

III.9. D^c es el subespacio intersección de los subespacios conjugados de los vectores de D; esto es:

$$D^c=\bigcap_{\bar{x}\in D}\mathscr{C}(\bar{x})$$

III.10. $\omega(\bar{x})=X^tAX=(X^tC)(FX)=X^t(CF)X$ y CF tiene rango 1.
Si rang $A=1$, entonces $A=CF$ para ciertos $C\in\mathcal{M}_{n\times 1}$ y $F\in\mathcal{M}_{1\times n}$.

III.11. 2. $\omega(M)=2x_2x_3-2x_1x_4$

3.
$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}$$

4. Subespacio de las matrices simétricas.

III.12. 1. $f(p(x),\ q(x))=\frac{1}{2}[p(\alpha)q(\beta)+p(\beta)q(\alpha)]$

2.
$$A=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & \alpha+\beta & \alpha^2+\beta^2\\ \alpha+\beta & 2\alpha\beta & \alpha\beta(\alpha+\beta)\\ \alpha^2+\beta^2 & \alpha\beta(\alpha+\beta) & 2\alpha^2\beta^2\end{bmatrix}$$

3. $\alpha+\beta=0$
4. Si $\alpha\neq 0$, $N(\omega)=\mathcal{V}(\alpha^2+x^2)$.
Si $\alpha=0$, $N(\omega)=\mathcal{V}(x,\ x^2)$.
Diagonal $(1,\ \alpha^2,\ 0)$, base $(1,\ x,\ -\alpha^2+x^2)$.

III.13. Sea $(\bar{u}_1,\ ...,\ \bar{u}_n)$ una de las bases en las que la matriz $A=[a_{ij}]$ de ω es diagonal. La base pedida puede ser la $(\bar{e}_1,\ ...,\ \bar{e}_n)$ siguiente:

$$\bar{e}_i=(1/\sqrt{a_{ii}})\bar{u}_i,\quad \text{si}\quad i\leq r$$
$$\bar{e}_i=\bar{u}_i\quad \text{si}\quad i>r$$

(nótese que, en general, $\sqrt{a_{ii}}$ será un número complejo).

III.14. 1.
$$A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&-2&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

2. $\omega(\bar{x})=x_1^2-x_2^2$ en la base $(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3)$:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0)$$
$$\bar{u}_2 = (2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 0)$$
$$\bar{u}_3 = (-1, 0, 1)$$

III.15. 1. Diagonal $(1, \alpha - 1, \alpha + 1)$; base $((1, -1, 0), (2, -1, 0), (1, -1, 1))$
2. Si $\alpha = 1$, $N(\omega) = \mathcal{V}(2, -1, 0)$. Si $\alpha = -1$, $N(\omega) = \mathcal{V}(1, -1, 1)$. Si $\alpha \neq 1, -1$, entonces $N(\omega) = O$.
3. $(x - z) \pm \sqrt{2}(y + z) = 0$.
4. Base $((1, -1, 1), (\sqrt{2}, 1, 0), (\sqrt{2}, -1, 0)$, $\omega(\bar{x}) = -8x_2x_3$.

III.16. 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$

2. Si $\alpha \neq 0$, $N(\omega) = O$.
Si $\alpha = 0$, $N(\omega) = \mathcal{V}(1, -1, 0, 1)$.
3. Diagonal $(1, 1, -1, \alpha)$.
Base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$, donde:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0, 0) \quad , \quad \bar{u}_2 = (0, 0, 1, 0)$$
$$\bar{u}_3(-1, 1, -1, 0) \qquad \bar{u}_4 = (1, -1, 0, 1)$$

4. $(\bar{u}_1 + \bar{u}_3, \bar{u}_2 + \bar{u}_3, 2\bar{u}_3 + \bar{u}_4, \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 3u_3 + u_4)$

$$\omega(\bar{x}) = -2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 - \\ - 2x_2x_4 - 4x_3x_4$$

III.17. Supóngase $\omega(\bar{u}) > 0$ y $\omega(\bar{v}) < 0$. Búsquese un $\bar{x} = \lambda\bar{u} + \bar{v}$, $\bar{x} \neq \bar{o}$, tal que $\omega(\bar{x}) = 0$.

III.18. $(M^tM)^t = M^tM$. Si $X \neq O$ es matriz columna, $MX \neq O$ y, por ello, $(MX)^t(MX) > 0$ si $X \neq O$; luego $X^t(M^tM)X > 0$ para todo $X \neq O$.

III.19. La matriz A ha de ser simétrica y definida positiva.

III.20. $x_1 = y_1 - \dfrac{1}{a_{11}} \ (a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n)$; $x_i = y_i$ para $i = 2, 3, ..., n$.

$x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_i = y_i$ para $i = 3, ..., n$.

III.21. Recúrrase a que $\omega(\lambda\bar{u} + \bar{v}) \geqslant 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

III.22. 1. $A = \begin{bmatrix} c-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & c-1 \end{bmatrix}$

2. Diagonalización para $c = 1$:
Diagonal: $-2, 2, 2, -2$.
Base:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonalización para $c \neq 1$:
Diagonal: $c - 1, 2c, -2c, c(c - 1)(c - 2)$.
Base:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-c \end{bmatrix}$$

3. Nunca es definida; semidefinida negativa si $c = 0$.

III.23. 1. Si $\alpha = 0$, diagonal $(2, 6, 2, -2)$ y base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$ donde:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0, 0) \quad , \quad \bar{u}_2 = (-1, 0, 2, 0)$$
$$\bar{u}_3 = (0, 1, 0, 1) \quad , \quad \bar{u}_4 = (0, -1, 0, 1)$$

Si $\alpha \neq 0$, diagonal $(2, 6, \alpha, (\alpha^2 - 1)\alpha)$ y base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$ donde:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0, 0) \quad , \quad \bar{u}_2 = (-1, 0, 2, 0)$$
$$\bar{u}_3 = (0, 1, 0, 0) \quad , \quad \bar{u}_4 = (0, -1, 0, \alpha)$$

2. Si $|\alpha| < 1$, rang $\omega = 4$ y sig $\omega = (3, 1)$.
Si $\alpha > 1$, rang $\omega = 4$ y sig $\omega = (4, 0)$.
Si $\alpha = 1$, rang $\omega = 3$ y sig $\omega = (3, 0)$.
Si $\alpha = -1$, rang $\omega = 3$ y sig $\omega = (2, 1)$.
Si $\alpha < -1$, rang $\omega = 4$ y sig $\omega = (2, 2)$.
3. ω definida positiva sii $\alpha > 1$; ω semidefinida positiva sii $\alpha = 1$.

III.24. Según el criterio de Sylvester ha de ser $\alpha > 0$. Diagonalizando por congruencia se obtiene (entre otras muchas) la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$:

$$[G|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \simeq$$

$$\simeq\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0&0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{6}\\0&0&1&3/\sqrt{21}&2/\sqrt{21}&-2/\sqrt{21}\end{array}\right]$$

$$\bar{e}_1=\left(0,\,0,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad;\quad \bar{e}_2=\left(0,\,\frac{2}{\sqrt{6}},\,\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\bar{e}_3=\left(\frac{3}{\sqrt{21}},\,\frac{2}{\sqrt{21}},\,\frac{-2}{\sqrt{21}}\right)$$

III.25. Según el criterio de Sylvester ha de ser $\alpha\neq\beta$.

$$G=\begin{bmatrix}26&-14\\-14&10\end{bmatrix}$$

III.26. 1. $(f|g)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{a_ib_j}{1+i+j}$

2. Las siguientes n funciones $f_p\in V$ son ortogonales a f_0; el subespacio que engendran es solución:

$$f_p(x)=(n+p)x^{p-1}-(n+p+1)x^p$$

$p=1,\,2,\,...,\,n.$

III.27.

$$G=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-1&1&0&\cdots&0\\0&-1&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\0&1&-1&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\-1&2&-1&\cdots&0\\0&-1&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&2\end{bmatrix}$$

III.28. 1. Según el criterio de Sylvester, $\alpha=2$.

2. $\bar{a}=3\bar{u}_1+(\sqrt{2}-1)\bar{u}_2+(\sqrt{2}+1)\bar{u}_3$.

3. $$\bar{e}_1=\frac{1}{\sqrt{70}}(6\bar{u}_1+3\bar{u}_2+5\bar{u}_3)$$

$$\bar{e}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2\bar{u}_1+\bar{u}_2+\bar{u}_3)$$

$$\bar{e}_3=\frac{1}{\sqrt{195}}(11\bar{u}_1-7\bar{u}_2+5\bar{u}_3)$$

III.29. 1. $$G=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}30a&30c&10a\\30b&10a&10b+20c\\10a&20b+10c&6a\end{bmatrix}$$

2. $b=c,\ a>0,\ a^2>18b^2$.

3. $U=\{\alpha+\beta x+\gamma x^2/\alpha+2\beta+\gamma=0\}$

una base ortogonal de U:

$(1-x^2,\ 1+2x-5x^2)$

Proyección: $-\frac{1}{2}x+x^2$.

III.30. $$G=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&3&4\\2&4&\alpha\end{bmatrix}\quad\text{para}\quad\alpha>6$$

III.31. 1. $$A=\begin{bmatrix}k\cos\alpha&-k\,\text{sen}\,\alpha&0\\0&0&k\\k\,\text{sen}\,\alpha&k\cos\alpha&0\end{bmatrix}$$

2. $(\lambda\cos\alpha,\ \lambda(\cos\alpha+1),\ -\lambda(\cos\alpha+1))$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$(0,\ \mu,\ -\mu)\quad,\quad\mu\in\mathbb{R}$

$(a,\ b,\ b)\quad,\quad a,\,b\in\mathbb{R}$

III.32. 1. $$G=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

2. $\bar{u}_1=\bar{e}_1,\ \bar{u}_2=\bar{e}_2,\ \bar{u}_3=\bar{e}_3-\bar{e}_2$

3. $a=2,\ b=1,\ c=2$

$$\text{áng}\,(f(\bar{e}_1),\,f(\bar{e}_2))=90^\circ$$

$$A'=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&2&3\\-3&3&3\\1&-2&0\end{bmatrix}$$

III.33. Dados $\bar{x}$, $\bar{y} \in V$, se puede poner de manera única $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ e $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ con $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1 \in U_1$ y $\bar{x}_2$, $\bar{y}_2 \in U_2$. El producto escalar pedido $(\cdot)$ está definido por $\bar{x} \circ \bar{y} = \bar{x}_1 * \bar{y}_1 + \bar{x}_2 \circ \bar{y}_2$.

III.34. Una de las muchas bases ortonormales de U y de $U^\perp$ son las $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ y $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ formadas por:

$$\bar{u}_1 = (1/2,\ 1/2,\ 1/2,\ 0,\ 1/2)$$
$$\bar{u}_2 = (2/3,\ 0,\ -2/3,\ 1/3,\ 0)$$

$$\bar{e}_1 = (0,\ 1/\sqrt{2},\ 0,\ 0,\ -1/\sqrt{2})$$
$$\bar{e}_2 = (-1/3\sqrt{2},\ 0,\ 1/3\sqrt{2},\ 4/3\sqrt{2},\ 0)$$
$$\bar{e}_3 = (-1/2,\ 1/2,\ -1/2,\ 0,\ 1/2)$$

Proyección sobre U:

$$\bar{a}' = \frac{1}{2}\,\bar{u}_1 + \frac{2}{3}\,\bar{u}_2 = \left(\frac{25}{36}, \frac{9}{36}, \frac{-7}{36}, \frac{8}{36}, \frac{9}{36}\right)$$

Proyección sobre $U^\perp$:

$$\bar{a} - \bar{a}' = \left(\frac{11}{36}, \frac{-9}{36}, \frac{7}{36}, \frac{-8}{36}, \frac{-9}{36}\right)$$

III.35. 1. Una de las muchas soluciones puede ser la $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ con

$$\bar{e}_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$$
$$\bar{e}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 1)$$
$$\bar{e}_3 = (1,\ 1,\ -1,\ -1)$$

2. $\bar{a} = (1/2,\ 1/2,\ \cos\alpha/\sqrt{2},\ \operatorname{sen}\alpha/\sqrt{2})$ ha de ser tal que haga mínimo a

$$\left\| \frac{1+\sqrt{2}\ \cos\alpha}{4}\,\bar{e}_1 + \frac{1+\sqrt{2}\ \operatorname{sen}\alpha}{4}\,\bar{e}_2 + \frac{2-\sqrt{2}\ \cos\alpha - \sqrt{2}\ \operatorname{sen}\alpha}{8}\,\bar{e}_3 \right\| = \frac{7+\operatorname{sen} 2\alpha}{8}$$

lo que ocurre para $\alpha = 3\pi/4$ y $\alpha = -\pi/4$, luego

$$\bar{a} = (\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2})$$

o

$$\bar{a} = (\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2})$$

III.36. 1. $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$
2. $(U_1 \cap U_2)^\perp \supset U_1^\perp + U_2^\perp$
3. $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

III.37. 1. $a_0 = 1/\sqrt{2\pi}$, $a_p = 1/\sqrt{\pi}$ $(p > 1)$
2. Proyección de $\psi(x)$:

$$\frac{2}{1}\operatorname{sen} x - \frac{2}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3x - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2}{n}\operatorname{sen} nx$$

Proyección de $\psi(x)$:

$$\frac{\pi^2}{3} - \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots + (-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

III.38. Compruébese que la norma del vector $f(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}) - \lambda f(\bar{x}) - \mu f(\bar{y})$ es igual a la norma de $(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}) - \lambda\bar{x} - \mu\bar{y}$ y que, por tanto, es nula.

III.39. Compruébese que $4(\bar{a}\cdot\bar{b}) = \|\bar{a} + \bar{b}\|^2 - \|\bar{a} - \bar{b}\|^2$; tómese $\bar{a} = \bar{x}$ y $\bar{b} = \bar{y}$; tómese después $\bar{a} = f(\bar{x})$ y $\bar{b} = f(\bar{y})$.

III.40. 2. F es ortogonal (lineal y conserva el producto escalar).
3. F no es sobreyectiva; $f(x) = 1$ no es imagen por F de ninguna función continua.

III.41. 1. Como $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ es una base ortonormal y (M_1, M_2, M_3) es un sistema ortonormal (se comprueba fácilmente), existe la aplicación ortogonal f.
2.

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}$$

III.42. 1. Si, ya que $f(U) \perp f(U^{\perp})$ y $\dim f(U) + \dim f(U^{\perp}) = \dim U + \dim U^{\perp} = n$.

2. $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ con $\bar{x}_1 \in U$ y $\bar{x}_2 \in U^{\perp}$ (descomposición única); $f(\bar{x}) = f_1(\bar{x}_1) + f_2(\bar{x}_2)$.

III.43. 1. Aplicar el «teorema del coseno» de los triángulos ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$).

2. Refiérase f a las bases $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, en V_2 origen, y $(f(\bar{a}_1), f(\bar{a}_2))$ en V_2 imagen; la matriz de f es la identidad; las matrices métricas son iguales.

III.44. 1.

$$f(\bar{e}_1) = (2/3,\ 2/3,\ -1/3)$$
$$f(\bar{e}_2) = (-1/3,\ 2/3,\ 2/3)$$
$$f(\bar{e}_3) = (2/3,\ -1/3,\ 2/3)$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} A^tA = I \\ \det A = 1 \end{matrix}$$

3. $$B = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $$\cos \theta = \sqrt{2 \cos \alpha - 1} \quad ; \quad \alpha \leqslant 60^\circ$$

III.45. 1. $A^tA = I$ y $\det A = -1$, luego f es ortogonal inversa.

2. $\bar{u} = \rho(\sqrt{3} - \sqrt{2},\ 1 + \sqrt{2} - \sqrt{6},\ 1 - \sqrt{2})$ para $\rho \in \mathbb{R}$.

3. El eje de giro es la recta engendrada por $\bar{u}$.
El plano de la simetría es el ortogonal a $\bar{u}$.
El ángulo de giro α es el ángulo áng $(\bar{v}, f(\bar{v}))$, donde $\bar{v}$ es ortogonal a $\bar{u}$, por ejemplo $\bar{v} = (\sqrt{2}, 1, 1)$

$$\cos \alpha = \frac{6 + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{12} \simeq 0{,}585 \quad , \quad \alpha \simeq 54{,}23$$

III.46. $a = 1/\sqrt{2}$, $b = -1/\sqrt{2}$, $x = 1/2$, $z = -3/4$, $t = -1/4$

III.47. f es la composición de una rotación, de cierto ángulo α y alrededor de cierta recta R, seguida de la simetría respecto del plano perpendicular a R; f^2 es la rotación de ángulo 2α alrededor de R. La transformación f^n es una rotación de ángulo $n\alpha$; ha de ser $2\pi/\alpha$ racional.

III.48. Poner $\bar{u} = \lambda\bar{v} + \mu\bar{w} + \nu(\bar{v} \wedge \bar{w})$ y recurrir al último ejercicio del Capítulo 8.

III.49. Recúrrase a la fórmula del problema anterior.

III.50. Recurrir a una base ortonormal, poner $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$ en forma del determinante de la matriz de coordenadas y recurrir a que $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]^2$ es el determinante de dicha matriz por su traspuesta.

III.51. $f(\bar{u}) \wedge f(\bar{v}) = (\det f)\ (\bar{u} \wedge \bar{v})$.

III.52. Recurrir a coordenadas en una base ortonormal directa.

III.53. 1. $f(\bar{u}) = \cos \theta \bar{u} + \operatorname{sen} \theta(\bar{e} \wedge \bar{u})$

2. $f(\bar{x}) = (\bar{x} \cdot \bar{e})\bar{e} + \cos \theta\ [\bar{x} - (\bar{x} \cdot \bar{e})\bar{e}] + \operatorname{sen} \theta(\bar{e} \wedge \bar{x})$

3. Si $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y $f(\bar{x}) = (x'_1, x'_2, x'_3)$, es

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 8 + 5\sqrt{2} & 4 + 4\sqrt{2} & -8 + 7\sqrt{2} \\ 4 - 8\sqrt{2} & 2 + 8\sqrt{2} & -4 - 4\sqrt{2} \\ -8 + \sqrt{2} & -4 + 8\sqrt{2} & 8 + 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Ejercicios y problemas a la parte IV

ENUNCIADOS

IV.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sean U_1 y U_2 dos subespacios suplementarios de V, de dimensiones p y q. Hallar los autovalores del endomorfismo, $f: V \to V$, proyección sobre U_1 paralelamente a U_2.

IV.2. Sea λ un autovalor de un endomorfismo $f: V \to V$. Compruébese que λ^2 es un autovalor del endomorfismo $f \circ f$. Si f es un automorfismo, pruébese que $1/\lambda$ es un autovalor de f^{-1}.

IV.3. Sean A y B dos matrices reales, ambas cuadradas y de igual tamaño. Compruébese que:

a) Si una, al menos, de las matrices A o B es regular, entonces AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

b) Si A y B, ambas, singulares, entonces AB y BA tienen, también, el mismo polinomio característico (indicación: recurrir al resultado anterior aplicado a A y $B' = B + \varepsilon I$ y hállese luego que ε tiende a cero).

IV.4. Sea A una matriz cuadrada real de tamaño $n \times n$. Si n es par y $\det A < 0$, pruébese que A tiene, al menos, dos autovalores reales.

IV.5. Hallar los autovalores y los subespacios propios del endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que, en la base canónica, tiene asociada la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Analícese si f es diagonalizable.

IV.6. Hallar los autovalores y los subespacios propios del endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que, respecto de la base canónica, tiene asociada la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Analícese si f es diagonalizable.

IV.7. Hallar los autovalores y los subespacios propios del endomorfismo $f: V \to V$ (donde V es un espacio vectorial real de dimensión 4) que, en cierta base dada $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$ de V, tiene asociada la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Analícese si f es diagonalizable.

IV.8. Hallar los autovalores y los subespacios propios de la matriz A, de tamaño $n \times n$ con $n \geq 2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{bmatrix}$$

Analícese si A es diagonalizable por semejanza.

IV.9. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 en el que se considera una base $B = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$; en dicha base, las coordenadas se denotan por x_1, x_2, x_3. De un endomorfismo $f: V \to V$ se sabe que:

- El vector $6\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 5\bar{u}_3$ se transforma, por f, en sí mismo.
- $U = \{\bar{u} \in V / 2x_1 + 11x_2 - 7x_3 = 0\}$ es un subespacio propio de f.
- La traza de la matriz A de f, en B, es igual a 5

a) Hallar los autovalores de f.

b) Hallar la matriz A de f en la base B.

IV.10. Hallar todas las matrices cuadradas, de un cierto tamaño $n \times n$, tales que $A = P^{-1}AP$ para toda matriz regular P, de tamaño $n \times n$.

IV.11. Dada una matriz cuadrada A, sea A' la matriz que resulta de permutar, en A, las filas i-ésima y j-ésima y también las columnas i-ésima y j-ésima. Analizar si A y A' son semejantes y, si lo son, hallar una matriz regular P tal que $A' = P^{-1}AP$.

IV.12. Sean A y A' dos matrices semejantes y sea P una matriz de paso, $A' = P^{-1}AP$. Caracterizar, en función de P, a todas las matrices Q de paso, esto es, tales que $A' = Q^{-1}AQ$.

IV.13. Comprobar que la siguiente matriz cuadrada A es diagonalizable en $\mathbb{C}$ y obtener su forma diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IV.14. Se dice que una matriz cuadrada A es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = O$. Pruébese que una matriz cuadrada A, de tamaño $n \times n$, es nilpotente si y sólo si $\lambda = 0$ es el único autovalor de A, con multiplicidad n.

IV.15. Sea $f: V \to V$ un endomorfismo diagonalizable ($\dim V = n$) y sea $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)$ una base de V formada por vectores propios de f. Si es $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \cdots + \bar{u}_n$, compruébese que los vectores

$$\bar{e}_1 = \bar{u},\ \bar{e}_2 = f(\bar{u}),\ \bar{e}_3 = (f \circ f)(\bar{u}) = f^{(2)}(\bar{u}),$$
$$\ldots,\ \bar{e}_n = f^{(n-1)}(\bar{u})$$

forman una base de V.

IV.16. Sea A la matriz real, dependiente del parámetro α:

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha + 4 & 1 - \alpha & -2\alpha - \alpha^2 \\ 0 & 4 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \alpha^2 \end{bmatrix}$$

a) Obtener los valores de α para los que A es diagonalizable por semejanza.
b) Diagonalizar A para $\alpha = 1$ y para $\alpha = 2$.

IV.17. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que, respecto de una base dada $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, tiene asociada la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & -\alpha & \alpha \\ 2 + \alpha & -\alpha & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

a) Obtener los autovalores de A, comprobando que no dependen de α.
b) Obtener los subespacios propios de f, en función de α, y estudiar si f es diagonalizable.
c) Cuando f sea diagonalizable, hallar su forma diagonal y la base correspondiente.

IV.18. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo del que se sabe lo siguiente:

- f es diagonalizable y sólo tiene dos autovalores distintos.
- $f(U) = V$, siendo

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y - z = 0\}$$

y

$$V = \mathcal{V}[(1, 0, 1), (-1, 1, 1)]$$

- $\lambda_1 = -1$ es un autovalor de f y uno de sus vectores propios pertenece a U.
- $(1, 0, -1)$ es un vector propio de f y está asociado a un autovalor simple.

a) Hallar la matriz A de f en la base canónica, en función de cuantos parámetros sea preciso.
b) Si en $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar canónico, determinar f para que sea ortogonalmente diagonalizable.

IV.19. Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Si A es antisimétrica, pruébese que sus autovalores son números complejos imaginarios puros o, bien, son nulos.

IV.20. En el espacio vectorial euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$ y respecto de una base ortonormal $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, se considera un endomorfismo del que se sabe que:

- $f(\bar{e}_1) = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $f(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$.
- La matriz A de f es simétrica.
- $\bar{a} = 2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$ es autovector de f.

a) Hallar A y los autovalores y los autovectores de f.

b) Diagonalizar ortogonalmente f, determinando una base en la que se obtenga dicha diagonalización.

IV.21. En el espacio vectorial euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$ y respecto de la base canónica se considera el endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido mediante

$$(x, y, z) \longmapsto (x', y', z'), \text{ siendo } \begin{cases} 3x' = -x + 2y + 2z \\ 3y' = 2x - y + 2z \\ 3z' = 2x + 2y - z \end{cases}$$

a) Razonar si f es ortogonalmente diagonalizable.
b) Razonar si f es una transformación ortogonal.
c) Hallar los autovalores y los subespacios propios de f.
d) Hallar la forma diagonal de f y una base ortonormal correspondiente.
e) Describir geométricamente la transformación f.

IV.22. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y sea $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ una base ortonormal de V. Considérese el endomorfismo $f: V \to V$ que en la base dada tiene asociada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \alpha \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$$

a) Hallar la relación que debe haber entre los parámetros α, β y γ para que f admita un autovalor triple.
b) Suponiendo que $\beta\gamma > 0$, hallar los autovalores y subespacios propios de f (recúrrase al parámetro h, siendo $h^2 = 2\beta\gamma$).
c) Razónese si para algunos β y γ, la matriz A es ortogonalmente diagonalizable.

IV.23. De la siguiente matriz A se sabe que $\lambda_1 = 1$ es uno de sus autovalores y que $(1, 1, 1)$ es un vector propio de A asociado al autovalor λ_1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma \end{bmatrix}$$

a) Hallar α, β y γ.
b) Hallar los autovalores y los subespacios propios de A.
c) Comprobar que A es diagonalizable y hallar su matriz diagonal D.
d) Analizar si A es ortogonalmente diagonalizable y, en caso afirmativo, hallar una matriz ortogonal P tal que $D = P^{-2}AP$.

IV.24. En el espacio vectorial euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$ se considera un endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ del que se sabe que:

- La matriz A de f en la base canónica es simétrica.
- El subespacio $\mathcal{V}(2, -2, -1)$ es un subespacio propio de f.
- Los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ se transforman, respectivamente, en los vectores $(3, 2, 2)$ y $(2, 2, 0)$.

a) Razonar si f es ortogonalmente diagonalizable y si es una transformación ortogonal.
b) Hallar los autovalores y los subespacios propios de f.
c) Hallar la forma diagonal de f y obtener, si es posible, una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ en la que f tome dicha forma.

IV.25. Sea dada la siguiente matriz $A(\alpha)$:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1+\alpha & -1-\alpha \\ 1 & -1 & -1+\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

($\alpha \in \mathbb{R}$ dado).

a) Hallar los autovalores de $A(\alpha)$.
b) Hallar los valores de α para los que $A(\alpha)$ es diagonalizable por semejanza.
c) Analizar si $A(\alpha)$ es ortogonalmente diagonalizable (con el producto escalar canónico) para algún valor α_0 de α y, si lo es, obtener la correspondiente diagonalización (esto es, la forma diagonal D y una matriz ortogonal de cambio, $D = P^{-1}A(\alpha_0)P$).
d) Describir geométricamente la transformación $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que, en la base canónica, tiene asociada la matriz $(1/2)A(\alpha_0)$.
e) Hallar el menor valor natural de h para el que la matriz $G = A(0) + hI$ es matriz métrica de un producto escalar.

IV.26. Sea $\omega: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática dada por

$$\omega(x, y, z) = y^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

Diagonalizar ortogonalmente la forma cuadrática ω (en $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar canónico).

IV.27. Sea $\omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática que, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, tiene asociada la matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (con el producto escalar canónico) en la que la matriz D de ω, que también se pide, sea diagonal.

IV.28. Sea A una matriz simétrica real y sean α y β el menor y el mayor de los autovalores de A. Llamando $A'(h) = A - hI$, hallar los valores de h para los que $A'(h)$ es definida positiva, definida negativa y no definida.

IV.29. Diagonalizar ortogonalmente la siguiente matriz simétrica A, hallando la correspondiente matriz diagonal D y una matriz de paso ortogonal P, esto es, tal que $P^{-1} = P^t$ y $D = P^{-1}AP$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Analizar si A es definida positiva.

IV.30. Sean A y B dos matrices cuadradas simétricas, ambas de igual tamaño. Si los autovalores de A están en el intervalo $[a_1, a_2]$ y los autovalores de B están en el intervalo $[b_1, b_2]$, pruébese que los autovalores de $A + B$ están en el intervalo $[a_1 + b_1, a_2 + b_2]$.

IV.31. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Obtener una condición necesaria y suficiente para que exista un producto escalar en V con el que f sea un endomorfismo simétrico.

SOLUCIONES

IV.1. $\lambda = 1$ (con multiplicidad p) y $\lambda = 0$ (con multiplicidad q).

IV.2. $f(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \quad \Rightarrow \quad (f \circ f)(\bar{x}) = \lambda^2 \bar{x}$;
$f(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \lambda f^{-1}(\bar{x})$

IV.3. *a)*
$$\begin{aligned} \det(AB - \lambda I) &= \det(AB - \lambda B^{-1}B) = \\ &= [\det(A - \lambda B^{-1})] \det B = \\ &= \det B\, [\det(A - \lambda B^{-1}) = \\ &= \det(BA - \lambda BB^{-1}) = \\ &= \det(BA - \lambda I) \end{aligned}$$

b) $\det(AB + \varepsilon B - \lambda I) = \det(BA + \varepsilon B - \lambda I)$, al tender ε a cero, como los coeficientes de estos polinomios varían continuamente con ε (son funciones continuas de ε), se obtiene que $\det(AB - \lambda I) = \det(BA - \lambda I)$. Nótese que si $\lambda \neq 0$ es el autovalor de B más próximo a 0, entonces B' es regular para $0 < \varepsilon < |\lambda|$.

IV.4. El polinomio característico $p(\lambda)$ de A es tal que $p(0) = \det(A) < 0$ y $p(\lambda) \to +\infty$ para $\lambda \to -\infty$; por tanto, $p(\lambda)$ tienen, al menos, una raíz positiva y otra negativa.

IV.5. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
$V_{\lambda=0} = \mathcal{V}(-3, 3, 2)$, $V_{\lambda=1} = \mathcal{V}(2, 0, -1)$,
$V_{\lambda=2} = \mathcal{V}(1, 1, 0)$.

f es diagonalizable.

IV.6. $\lambda = 2$ doble y $\lambda = -1$ simple
$V_{\lambda=2} = \mathcal{V}[(1, 0, 1), (1, 1, 0)]$,
$V_{\lambda=-1} = \mathcal{V}(1, -1, 1)$,

f es diagonalizable.

IV.7. $\lambda_1 = 2$ doble y $\lambda_2 = 1$ doble
$V_{\lambda=2} = \mathcal{V}(\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3 + 2\bar{e}_4)$,
$V_{\lambda=1} = \mathcal{V}(\bar{e}_3, \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3 + \bar{e}_4)$,

f no es diagonalizable.

IV.8. $\lambda_1 = a$ con multiplicidad $n - 1$
$\lambda_2 = a + n$ (simple)

$$V_{\lambda=a}: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{tales que} \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

$$V_{\lambda=a+n}: \begin{bmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R})$$

A es diagonalizable por semejanza.

IV.9. *a)* $\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = \lambda_3,\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5$, luego $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

b) $V_{\lambda_1} = \mathcal{V}(\bar{u})$, con $\bar{u}(6, 2, 5)$; $V_{\lambda_2} = \mathcal{V}(\bar{v}, \bar{w})$, con $\bar{v}(7, 0, 2)$ y $\bar{w}(11, -2, 0)$. En la base $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ la matriz es diagonal, cambiando de base se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 66 & -42 \\ 4 & 24 & -14 \\ 10 & 55 & -33 \end{bmatrix}$$

IV.10. Sea $P = I + E_{ij}$, donde E_{ij} tiene todos sus elementos nulos salvo el de lugar i, j que vale 1 (para $i \neq j$); de $PA = AP$ se deduce que el elemento de lugar i, j de A es nulo (con $i \neq j$). Las matrices A pedidas son las matrices escalares (tienen ceros fuera de su diagonal).

IV.11. A y A' son semejantes; P es la matriz que resulta de permutar las columnas i-ésima y j-ésima de la matriz unidad.

IV.12. $Q = RP$, donde R es una matriz regular que conmuta con A.

IV.13. $\det(A - \lambda I) = \lambda^n - 1$, que tiene n raíces distintas en $\mathbb{C}$, luego A es diagonalizable en $\mathbb{C}$. La forma diagonal es:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & O & \\ & O & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\lambda_j = \cos \frac{2j\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2j\pi}{n} \quad (\text{para } j = 1, 2, \ldots, n)$$

(i es la unidad imaginaria).

IV.14. Si $A^k = O$ y λ es autovalor de A, existe $X \neq O$ tal que $AX = \lambda X$, luego $A^k X = \lambda^k X$, luego $\lambda = 0$.

Si los n autovalores de A son nulos, recurriendo a la forma triangular T de A (es $A = P^{-1}TP$ con T triangular; la diagonal de T está ocupada por los autovalores de A), como la diagonal de T tiene todos sus elementos nulos, es $T^n = O$, luego $A^n = O$.

IV.15. De ser $\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{e}_n = \bar{o}$, sería ($\lambda_i =$ = autovalor de f):

$$\alpha_1 + \alpha_2\lambda_i + \alpha_3\lambda_i^2 + \cdots + \alpha_n\lambda_i^{n-1} = 0$$

y este polinomio de grado $n-1$ tendría n raíces (los autovalores), luego sus coeficientes serían nulos.

IV.16. *a)* $\det(A - \lambda I) = [(4-\alpha^2) - \lambda][(2\alpha + 4) - \lambda] \cdot \cdot [(4-\alpha] - \lambda]$

$$\lambda_1 = 4 - \alpha^2, \quad \lambda_2 = 2\alpha + 4, \quad \lambda_3 = 4 - \alpha$$

Para $\alpha = 0$, f no es diagonalizable.
Para $\alpha \neq 0$, f es diagonalizable.

b) $\alpha = 1 \rightarrow D = P^{-1}AP$ con

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha = 2 \rightarrow D = P^{-1}AP$ con

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IV.17. *a)* $\lambda_1 = -1$ (simple) y $\lambda_2 = 1$ doble.

b) f diagonalizable $\Leftrightarrow \alpha = 0$

Si $\alpha = 0$,

$$V_{\lambda=-1} = \mathscr{V}(\bar{e}_2 - \bar{e}_3)$$

y

$$V_{\lambda=1} = \mathscr{V}(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, \bar{e}_1 + 2\bar{e}_3)$$

Si $\alpha \neq 0$,

$$V_{\lambda=-1} = \mathscr{V}(\bar{e}_2 - \bar{e}_3)$$

y

$$V_{\lambda=1} = \mathscr{V}(2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3)$$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ base: $\bar{u}_1 = \bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{u}_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$, $\bar{u}_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_3$

IV.18. *a)* $f(1, 0, 1) = (-1, 0, -1)$; $\lambda = -1$ doble

$$A = \begin{bmatrix} t & -2t & -1-t \\ 0 & -1 & 0 \\ -1-t & 2t & t \end{bmatrix} \quad (t \neq -1)$$

b) $t = 0$.

IV.19. Por ser $A^t = -A$, es $X^tAX = 0$ para toda columna X, pues:

$$X^tAX = (X^tAX)^t = X^tA^tX = -X^tAX$$

Sea $\lambda = \alpha + \beta_i$ un autovalor de A y $X + iY$ un vector propio correspondiente a λ, es

$$A(X + iY) = \lambda(X + iY)$$

luego

$$\left.\begin{aligned} AX &= \alpha X - \beta Y \\ AY &= \alpha Y + \beta X \end{aligned}\right\}$$

de donde:

$$X^tAX = \alpha X^tX - \beta X^tY$$
$$Y^tAY = \alpha Y^tY + \beta Y^tX$$

Sumando, es $O = \alpha(X^tY + Y^tY)$, luego $\alpha = 0$ y $\lambda = \beta i$.

IV.20 *a)*
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 6 \\ \lambda_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$V_{\lambda=0}\ \mathscr{V}(2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3)$$
$$V_{\lambda=3} = \mathscr{V}(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3)$$
$$V_{\lambda=6} = \mathscr{V}(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3)$$

b) $D = P^{-1}AP$ con

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

nueva base:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{3}(2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{3}(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3)$$

$$\bar{u}_3 = \frac{1}{3}(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3)$$

IV.21. La matriz de f es

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(que es simétrica y ortogonal).

a) f es ortogonalmente diagonalizable (A es simétrica).

b) f es una transformación ortogonal (A es ortogonal).

c) $\lambda_1 = 1$ (simple) y $\lambda_2 = -1$ (doble)

$$V_{\lambda=1} = \mathcal{V}(1, 1, 1)$$
$$V_{\lambda=-1} = \mathcal{V}[(1, -1, 0), (1, 0, -1)]$$

d)
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

base:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$$

$$\bar{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2, 1, 1)$$

e) f es la simetría (ortogonal) respecto de la recta que determina el vector (1, 1, 1).

IV.22. $\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \alpha \pm \sqrt{\beta\gamma}$

a) Hay autovalor triple si $\beta\gamma = 0$.

b) $\lambda_1 = \alpha,\ \lambda_2 = \alpha + h,\ \lambda_3 = \alpha - h$

$$V_{\lambda 1} = \mathcal{V}(-\beta\bar{e}_1 + \gamma\bar{e}_3)$$
$$V_{\lambda 2} = \mathcal{V}(\beta\bar{e}_1 + h\bar{e}_2 + \gamma\bar{e}_3)$$
$$V_{\lambda=3} = \mathcal{V}(\beta\bar{e}_1 - h\bar{e}_2 + \gamma\bar{e}_3)$$

c) $(-\beta\bar{e}_1 + \gamma\bar{e}_3,\ \ \beta\bar{e}_1 + h\bar{e}_2 + \gamma\bar{e}_3,\ \ \beta\bar{e}_1 - h\bar{e}_2 + \gamma\bar{e}_3)$ ha de ser un sistema ortogonal, o sea si $\beta^2 = \gamma^2 + \beta^2 + \gamma^2 = h^2$, o sea, para $\beta = \gamma$

IV.23. *a*) $\alpha = -2, \quad \beta = -2, \quad \gamma = -3$

b) $\lambda = 1$ (simple), $\lambda = -1$ doble

$$V_{\lambda=1} = \mathcal{V}(1, 1, 1)$$
$$V_{\lambda=-1} = \mathcal{V}[(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$$

c)
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d) No es ortogonalmente diagonalizable, pues $V_{\lambda=1}$ y $V_{\lambda=-1}$ no son ortogonales.

IV.24.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) f es ortogonalmente diagonalizable (A es simétrica); f no es una transformación ortogonal (A no es ortogonal).

b) $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6$

$$V_{\lambda_1} = \mathcal{V}(2, -2, -1)$$
$$V_{\lambda_2} = \mathcal{V}(1, 2, -2)$$
$$V_{\lambda_3} = \mathcal{V}(2, 1, 2)$$

c)
$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

base:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$$

$$\bar{u}_3 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$$

IV.25. *a*) $\lambda = 2$ triple y $\lambda_2 = -2$ (simple).

b) $\alpha = 0$, único valor para el que $\dim V_{\lambda=2} = 3$

c) Es ortogonalmente diagonalizable para $\alpha = 0$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & & & O \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ O & & & -2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

d) f es la simetría respecto del plano ortogonal al vector $(-1, 1, 1, 1)$.

e) $G = A(0) + hI$ es simétrica; debe ser definida positiva, esto es, ha de tener autovalores positivos; sus autovalores son $2 + h$ (triple) y $-2 + h$ (simple); por tanto, $h = 3$.

IV.26. Los autovalores de la matriz de ω (en base canónica) son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$ y $\lambda_3 = -\sqrt{3}$. Los subespacios propios son:

$$V_{\lambda_1} = \mathcal{V}(1, 0, -1)$$
$$V_{\lambda_2} = \mathcal{V}(1, -1-\sqrt{3}, 1)$$
$$V_{\lambda_3} = \mathcal{V}(1, -1+\sqrt{3}, 1)$$

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \sqrt{3}x_2^2 - \sqrt{3}x_3^2$$

donde x_1, x_2, x_3 son las coordenadas en la base ortonormal $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}(1, -1-\sqrt{3}, 1)$$

$$\bar{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{3}}}(1, -1+\sqrt{3}, 1)$$

IV.27 Autovectores y subespacios propios de A:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = -2$$

$$V_{\lambda_1} = \mathcal{V}(1, -1, 1)$$
$$V_{\lambda_2} = \mathcal{V}(1, -1, -2)$$
$$V_{\lambda_3} = \mathcal{V}(1, 1, 0)$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \\ \bar{u}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2) \\ \bar{u}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \end{aligned}$$

IV.28. $A'(h)$ es definida positiva, definida negativo y no definida según que, respectivamente, sea $h < \alpha$, $h > \beta$ y $\alpha \leqslant h \leqslant \beta$.

IV.29. Autovalores de A: $\lambda_1 = 1$ triple y $\lambda_2 = 5$ (simple)

$$V_{\lambda_1} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$V_{\lambda_2} = \mathcal{V}(1, 1, 1, 1)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ O & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La matriz A es definida positiva, pues sus autovalores son positivos.

IV.30. Sean λ_i los autovalores de A; sea (X_i) una base ortogonal de autovectores de A; toda columna X es $X = \Sigma\, \alpha_i X_i$

$$(AX)X^t = (\Sigma\, \alpha_i AX_i)(\Sigma\, \alpha_j X_j^t = (\Sigma\, \alpha_i \lambda_i X_i)(\Sigma\, \alpha_j X_j^t) =$$

$$= \Sigma\, \alpha_i^2 \lambda_i X_i X_i^t$$

$$a_1 XX^t = \Sigma\, a_1 \alpha_i^2 X_i X_i^t \leqslant \Sigma\, \alpha_i^2 \lambda_i X_i X_i^t = AXX^t$$

Análogamente, $a_2XX^t \geqslant AXX^t$. Para toda columna X es

$$\left.\begin{array}{l} a_1XX^t \leqslant AXX^t \leqslant a_2XX^t \\ b_1XX^t \leqslant BXX^t \leqslant b_2XX^t \end{array}\right\} \quad [1]$$

$$h_1XX^t \leqslant (A+B)XX^t \leqslant h_2XX^t \quad [2]$$

(se han llamado h_1 y h_2 al menor y al mayor de los autovalores de $A + B$). Sumando las relaciones [1] se obtiene que

$$(a_1 + b_1)XX^t \leqslant (A+B)XX^t \leqslant (a_2 + b_2)XX^t \quad [3]$$

Como existen ciertas columnas X_1 y X_2 (vectores propios de $A + B$ asociados a h_1 y h_2) tales que

$$h_1X_1X_1^t = (A+B)X_1X_1^t$$

y

$$h_2X_2X_2^t = (A+B)X_2X_2^t \quad [4]$$

de [2], [3] y [4] resulta que

$$[h_1, h_2] \subset [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

IV.31. El endomorfismo f diagonalizable. En tal caso, el producto escalar es aquel que hace ortonormal a una base en lo que f tenga matriz diagonal.

Ejercicios y problemas a la parte V

ENUNCIADOS

V.1. En el plano afín y usando coordenadas cartesianas xy se consideran dos puntos $P_1(\alpha_1, \beta_1)$ y $P_2(\alpha_2, \beta_2)$ y una recta $r: ax + by + c = 0$. Hallar la relación entre anteriores datos para que P_1 y P_2 estén a «distinto lado» de r (el segmento P_1P_2 corta a r).

V.2. En el plano afín se consideran dos triángulos ABC y $A'B'C'$ tales que las tres rectas AA', BB' y CC' pasan por un mismo punto O. Sean P, Q y R los puntos de intersección de los siguientes pares de rectas: AB y $A'B'$, BC y $B'C'$ y CA y $C'A'$. Compruébese que los puntos P, Q y R están alineados (teorema de Desargues).

V.3. Dados tres puntos alineados P, Q y R (de E_1, de E_2 o de E_3), se llama «razón simple» (PQR) al número real ρ que permite poner $\overrightarrow{PR} = \rho\overrightarrow{PQ}$.

Sean A_1, A_2 y A_3 tres puntos no alineados del plano afín E_2 y sea r una recta que no pasa por ninguno de dichos puntos. Se llaman B_1, B_2 y B_3 a los puntos de intersección de r con las rectas A_2A_3, A_3A_1 y A_1A_2, respectivamente. Pruébese que (teorema de Menelao):

$$(B_1A_2A_3)(B_2A_3A_1)(B_3A_1A_2) = 1$$

V.4. Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo del plano afín E_2 y sean B_1, B_2 y B_3 puntos situados en los segmentos A_2A_3, A_3A_1 y A_1A_2, respectivamente. Pruébese que las tres rectas A_1B_1, A_2B_2 y A_3B_3 pasan, las tres, por un mismo punto si y sólo si el producto de las razones simples (véase el problema precedente) $(B_1A_2A_3)$, $(B_2A_3A_1)$ y $(B_3A_1A_2)$ vale -1 (teorema de Ceva).

V.5. Se llama «cuadrilátero completo», del plano afín E_2, a la figura que forman cuatro rectas (lados) que se cortan dos a dos y tales que tres de ellas no pasan por un mismo punto; los seis puntos de intersección de cada dos lados se llaman vértices; las tres rectas que unen vértices opuestos (no situados en un mismo lado) se llaman diagonales. Pruébese que los puntos medios de las tres diagonales de un cuadrilátero completo están alineados.

V.6. En el plano afín E_2 y utilizando coordenadas cartesianas se dan los puntos $A(-7, 3)$, $B(7, -4)$ y $G(5, 2)$. Hallar el punto $C \in E_2$ tal que el triángulo ABC tiene su baricentro en G.

V.7. Sean r y s dos rectas que se cortan en un punto O; sea A un punto coplanario con las rectas y no situado en ninguna de ellas; sea B el punto medio de OA. En r se toma un punto variable, P; sea Q la intersección de s con PB; sea R la intersección de AP con la paralela a OA por Q. Hallar el lugar geométrico que describe R (compruébese que la recta OA forma parte del lugar).

V.8. Compruébese que en un triángulo ABC cualquiera las alturas pasan, las tres, por un mismo punto.

V.9. En el plano euclídeo y usando coordenadas rectangulares xy se consideran los puntos $A(0, 0)$, $B(0, 4)$ y $C(4, 2)$. Hallar el ortocentro, el baricentro y el circuncentro del triángulo ABC.

V.10. En el plano euclídeo y usando coordenadas rectangulares xy se considera la recta $r: 3x + 4y + 7 = 0$ y el punto $P(-2, 1)$; sea C el cuadrado de centro en P, cuyos lados son paralelos y perpendiculares a r y cuyos lados miden 2. Hallar las ecuaciones de dichos lados.

V.11. En el plano euclídeo y usando coordenadas rectangulares Oxy se consideran las rectas $y = 2x$ e $y = -2x$; sea A un punto variable de la primera y B uno de la segunda. Hallar el lugar geométrico que describe el baricentro del triángulo OAB si A y B se mueven de manera que el área del triángulo OAB valga 9.

V.12. En el plano euclídeo E_2 se considera una referencia cartesiana $(O; \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ cuyos vectores $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ son unitarios y tales que áng $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \theta$. Se considera otra referencia $(C; \bar{u}_1, \bar{u}_2)$ en la que $C(a, b)$, $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ son unitarios y tales que áng $(\bar{e}_1, \bar{u}_1) = \alpha$ y áng $(\bar{e}_1, \bar{u}_2) = \beta$. Relacionar (en función de a, b, θ, α y β) las coordenadas (x, y) de un punto en la primera referencia con las coordenadas (x', y') del mismo punto en la nueva referencia.

V.13. En el plano euclídeo E_2 y usando coordenadas rectangulares (x, y) se consideran las rectas que admi-

ten ecuación de la forma $x + 2\alpha y + \alpha^2 = 0$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Se pide:

1. Relación entre a y b para que por $P(a, b)$ pasen dos rectas de la familia.
2. Lugar geométrico de los puntos P por los que pasa una sola recta.
3. Lugar geométrico de los puntos por los que pasan dos rectas perpendiculares.

V.14. Sea ABC un triángulo isósceles ($AB = AC$). Sean P y Q dos puntos variables que recorren AB y BC, respectivamente, de modo que la proyección ortogonal de PQ sobre BC tiene longitud mitad que BC. Pruébese que la perpendicular a PQ por Q pasa por un punto fijo.

V.15. En el plano euclídeo E_2 y usando coordenadas rectangulares xy se considera el paralelogramo determinado por las cuatro rectas $ax + by \pm c = 0$ y $\alpha x + \beta y \pm \gamma = 0$. Hallar el área de dicho paralelogramo.

V.16. En el plano euclídeo E_2 se consideran dos rectas r y s que se cortan. Hallar el lugar geométrico de los puntos de E_2 tales que la suma de sus distancias a r y a s es constante y vale k.

V.17. En el plano euclídeo E_2 y usando coordenadas rectangulares se consideran las circunferencias C y C' que tienen centros en los puntos $O(\alpha, \beta)$ y O' $(\alpha + d \cos \varphi, \beta + d \operatorname{sen} \varphi)$ y radios r y r'. Se pide:

1. Hallar una ecuación cuyas raíces sean las pendientes de las tangentes a C desde un punto $P(a, b)$.
2. Hallar las ecuaciones de las cuatro tangentes comunes a las circunferencias C y C' (se supone $r < r'$ y $r + r' < d$).

V.18. En el espacio afín E_3 se considera una cierta referencia cartesiana, en la que las coordenadas de un punto X son (x, y, z). Se considera otra referencia: la que tiene origen en $C(-2, 1, -1)$ y por vectores a $\bar{u}_1 = (1, 2, 3)$, $\bar{u}_2 = (0, 1, 1)$ y $\bar{u}_3 = (2, -3, 0)$. Se pide:

1. Hallar las coordenadas (x', y', z') de X en la nueva referencia.
2. Hallar los puntos $X \in E_3$ que tengan iguales coordenadas en ambas referencias.

V.19. En el espacio afín E_3 y usando coordenadas cartesianas xyz se consideran un punto $P(-1, 1, 2)$, un plano $\pi: 3x + y - z = 9$ y dos rectas r y s:

$$r\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad s\begin{cases} x + y - 2z - 2 = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

Se pide: 1) la recta que pasa por P y se apoya en (corta a) las rectas r y s; y 2) la recta que pasa por P se apoya en r y es paralela a π.

V.20. En el espacio afín E_3 y usando coordenadas cartesianas xyz se consideran los cuatro planos siguientes:

$$x + 3y + z + 4 = 0 \qquad x + 6y + 2z + 8 = 0$$
$$x + 4y + 6 = 0 \qquad x + 8y + 2z + 10 = 0$$

Hallar los vértices del tetraedro cuyas caras son los planos dados.

V.21. Estudiar, en función de los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, la posición relativa de las rectas:

$$\frac{2x}{\alpha + 3} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 2}{-1} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2x - y = \alpha + 1 \\ \alpha y = 2z = 2 \end{cases}$$

V.22. En el espacio afín E_3 y usando coordenadas cartesianas xyz se consideran las siguientes rectas r y s (donde α y β son dados):

$$r\begin{cases} x + y - 3z + 2 = 0 \\ x - y - z + 4 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + \alpha\lambda \\ y = 1 + \beta\lambda \\ z = \quad 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se pide: 1) valores de α y β para los que r y s se cortan; 2) valores de α y β para los que r y s son paralelas; 3) para $\alpha = 3$ y $\beta = 1$, hallar el plano paralelo a r y que pasa por s.

V.23. En el espacio afín E_3 se consideran las dos rectas r y s siguientes:

$$r: X = P + \lambda\bar{u} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

y

$$s: X = Q + \mu\bar{v} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

Suponiendo que r y s se cruzan, hallar el lugar geométrico de los puntos medios de todos los segmentos que unen un punto de r con un punto de s.

V.24. Estudiar, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, la posición relativa de la recta r y el plano π siguientes o

$$r\begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 4x + \alpha y = 1 \end{cases} \qquad \pi : (\alpha + 1)x + 3y + 2z = 3$$

V.25. Estudiar, según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los tres planos siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha x + \quad y + \quad z &= 1 \\ x + \alpha^2 y + \quad z &= \alpha \\ \alpha x + \quad y + \alpha^3 z &= \alpha^2 \end{aligned}$$

V.26. Estudiar, según los valores de los parámetros α y β, la posición relativa de los tres planos siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &: \alpha x + \quad y + 2z = 0 \\ \pi_2 &: \alpha x + \quad \beta y + 2z = 1 \\ \pi_3 &: \ x + (\beta - 1)y + \quad z = 0 \end{aligned}\right\}$$

V.27. En el espacio euclídeo E_3 y usando coordenadas rectangulares xyz se consideran las rectas r y s siguientes:

$$r\begin{cases} x + z = 1 \\ \alpha x + y + z = 0 \end{cases} \qquad s\begin{cases} 2\alpha x + y + z = 1 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

1. Hallar α de manera que r y s sean perpendiculares.
2. Para $\alpha = 2$, hallar la proyección ortogonal de r sobre el segundo de los planos que definen a s.
3. Hallar el ángulo que forman la anterior proyección y s.

V.28. Sean $r = P + \mathcal{V}(\bar{u})$ y $s = P + \mathcal{V}(\bar{v})$ dos rectas, que pasan por un mismo punto P, del espacio euclídeo E_3. Se pide:

1. Las bisectrices del ángulo que forman r y s.
2. El lugar geométrico de los puntos X de E_3 que equidistan de r y s.

V.29. En el espacio euclídeo E_3 y usando coordenadas rectangulares $Oxyz$ se considera el plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$. Hallar la ecuación del lugar geométrico que engendran las rectas que pasan por el origen O y forman un ángulo θ con el plano π.

V.30. En el espacio euclídeo E_3 y utilizando coordenadas rectangulares $Ox_1x_2x_3$ se consideran tres puntos no alineados $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$ distintos de O; sea π un plano que se mueve paralelamente al ABC y sean $A'B'C'$ los puntos de intersección de π con las rectas OA, OB y OC respectivamente. Por A', B' y C' se trazan planos perpendiculares a OA, OB y OC, respectivamente. Hallar el lugar geométrico descrito por el punto de intersección de estos tres planos.

V.31. En el espacio euclídeo E_3 y usando coordenadas rectangulares xyz se consideran las rectas:

$$r\begin{cases} x = az + h \\ y = bz + k \end{cases} \qquad r'\begin{cases} x = a'z + h' \\ y = b'z + k' \end{cases}$$

Hallar la distancia entre ellas.

V.32. En el espacio euclídeo E_3 y usando coordenadas rectangulares $Oxyz$ se considera un triángulo ABC variable tal que sus vértices A, B y C se desplazan por los ejes Ox, Oy y Oz de manera que su área permanece constante e igual a S. Se pide:

1. Lugar geométrico de la proyección ortogonal del origen O sobre el plano ABC.
2. Lugar geométrico descrito por el baricentro del triángulo ABC.
3. Lugar geométrico descrito por el ortocentro del triángulo ABC.

V.33. En el espacio euclídeo se consideran los planos de ecuaciones euclídeas $\pi : \bar{a} \cdot \overline{PX} = 0$ y $\tau : \bar{b} \cdot \overline{QX} = 0$. Hallar la recta de π que pasa por P y es línea de máxima pendiente sobre el plano τ (se suponen π y τ no paralelos).

V.34. En el espacio euclídeo E_3 se consideran las rectas $r = P + \mathcal{V}(\bar{u})$ y $s = Q + \mathcal{V}(\bar{v})$, que se cruzan. Se considera una recta variable que corta a las r y s y es tal que forma con ellas ángulos iguales. Hallar el lugar geométrico descrito por el punto medio de la anterior recta variable.

V.35. Sea $OABC$ un tetraedro del espacio euclídeo E_3. Si dos pares de aristas opuestas son perpendiculares, pruébese que el tercer par también está formado por aristas perpendiculares.

V.36. La «esfera» de un reloj de torre está situada en un plano π de manera que el extremo del minutero alcanza su posición más alta a las horas exactas. Sabiendo que dicha posición más alta es la del punto $P(5/3, 7/3, 5/3)$ y que el centro de la esfera del reloj está situado en el punto $Q(1, 2, 1)$ (re-

pecto de una referencia cartesiana rectangular $Oxyz$; el eje Oz vertical y hacia arriba) se pide:

1. Ecuación del plano π.
2. Coordenadas del extremo del minutero a las 0^h15^m.
3. Para un observador situado en el punto $R(4, 1, 0)$, ¿cuál es el ángulo aparente que forman las posiciones del minutero a las 0^h y a las 0^h15^m?
4. Coordenadas del extremo del minutero a las $0^h\alpha^m$.
5. Ecuaciones (no paramétricas) de la circunferencia descrita por el extremo del minutero en el transcurso de una hora.

V.37. Si P_1, P_2 y P_3 son tres puntos alineados del espacio afín E_3, se llama razón simple de P_1, P_2, P_3 al número r, que se denota poniendo $r = (a_1a_2a_3)$, para el que $\overrightarrow{P_1P_3} = r\overrightarrow{P_1P_2}$. Se pide:

1. Si P_3 es el punto medio de los P_1 y P_2, hallar las razones simples

$$(P_1P_2P_3),\ (P_1P_3P_2),\ (P_2P_1P_3),$$
$$(P_3P_2P_1) \text{ y } (P_2P_3P_1)$$

2. Si $r = (P_1P_2P_3)$, hallar el baricentro de los puntos P_2 y P_3 afectados de los coeficientes r y -1.

V.38. En el espacio afín E_3 se consideran dos rectas r_1 y r_2 no paralelas. Hallar el lugar geométrico descrito por los puntos medios de todos los segmentos que unen un punto de r_1 con otro de r_2.

V.39. Dadas dos rectas r_1 y r_2 que se cortan en un punto P, r_1 y r_2 del espacio afín euclídeo E_3, se llaman bisectrices de r_1 y r_2 a las rectas que son coplanarias con ellas, pasan por P y forman ángulos iguales con r_1 y r_2. Hallar las bisectrices de r_1 y r_2.

V.40. Sean P, Q y R tres puntos del espacio afín euclídeo E_3. Pruébese que $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$ si y sólo si el punto R pertenece al segmento de extremos P y Q.

V.41. En el espacio afín euclídeo E_3 se dan cuatro puntos fijos A, B, C y D. Hallar el lugar geométrico descrito por los puntos $X \in E$ tales que

$$\|\overrightarrow{XA} + 3\overrightarrow{XB}\| = \|\overrightarrow{XC} + 3\overrightarrow{XD}\|$$

V.42. En el espacio afín euclídeo E_3 se considera una esfera S de radio ρ y un punto P situado a distancia d del centro C de S. Por P se traza una recta variable que corta a S en X_1 y X_2. Si $[PX]$ y $[PX_2]$ denotan las distancias orientadas de P a X_1 y X_2 (distancias con igual o distinto signo según que X_1 y X_2 estén o igual o a distinto lado de P), pruébese que $[PX_1][PX_2] = d^2 - \rho^2$ (constante que se llama *potencia* de P respecto de S).

V.43. En el espacio afín euclídeo E_3 se consideran dos esferas S_1 y S_2. Hallar el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia (véase el ejercicio anterior) respecto de ambas esferas. Este lugar es un plano, que se llama *plano radical* de las esferas dadas.

SOLUCIONES

V.1. La recta P_1P_2 $(X = P_1 + \lambda\overrightarrow{P_1P_2})$ ha de cortar a r para $O < \lambda < 1$;

$$\text{signo } (a\alpha_1 + b\beta_1 + c) \neq \text{signo } (a\alpha_2 + b\beta_1 + c)$$

V.2. Tómese la referencia cartesiana que tiene su origen en O, que tiene por ejes a las rectas OAA' y OBB' y cuyos vectores son tales que C tiene coordenadas $(1, 1)$; $A(a, 0)$, $A'(a', 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, b')$, $C'(h, h)$.

V.3. Tómese la referencia $(A_1; \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$. Si las coordenadas i-ésimas de tres puntos P, Q y R son p_i, q_i y r_i, entonces $(PQR) = (r_i - p_i)/(q_i - p_i)$. Sean $B_3(a, 0)$ y $B_2(0, b)$, con lo que

$$B_1[(ab - a)/(b - a), \quad (ba - b)/(a - b)]$$

$$(B_1A_2A_3) = \frac{a(1 - b)}{b(1 - a)}$$

$$(B_2A_3A_1) = \frac{b}{b - 1}$$

$$(B_3A_1A_2) = \frac{a - 1}{a}$$

V.4. Tómese la referencia $(A_1; \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$; en ella $B_1(\alpha, 1 - \alpha)$, $B_2(0, b)$ y $B_3(a, 0)$,

$$(B_1A_2A_3)(B_2A_3A_1)(B_3A_1A_2) = \frac{\alpha b(a - 1)}{(1 - \alpha)(1 - b)a} = H$$

Las rectas $x + y/b = 1$, $x/a + y = 1$ y $(\alpha - 1)x = \alpha y$ se cortan en un punto si $H = -1$.

V.5. Sean r_1, r_2, r_3 y r_4 los lados; tómese referencia cartesiana de los ejes r_1 y r_2 y en la que las coordenadas de $r_1 \cap r_3$ y de $r_2 \cap r_4$ son $(1, 0)$ y $(0, 1)$; sean $(a, 0)$ y $(0, b)$ las coordenadas de $r_1 \cap r_4$ y de $r_2 \cap r_3$. Los puntos medios son $(1/2, 1/2)$, $(a/2, b/2)$ y $[(ab - a)/(2ab - 2), (ab - b)/(2ab - 2)]$, que están alineados.

V.6. El punto medio de AC es el $B + (3/2)\overrightarrow{BG}$, o sea, $(4, 5)$; luego $C(15, 7)$.

V.7. Tómense a r y s como ejes y a B como punto unidad, $B(1, 1)$ y $A(2,2)$. Sea $P(\alpha, 0)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$; $Q[0, \alpha/(\alpha - 1)]$,

$$AP: 2x + (\alpha - 2)y = 2\alpha \quad QM: y - x = \alpha/(\alpha - 1)$$

Eliminando α entre estas dos ecuaciones, resulta $(y - 2x)(y - x) = 0$, que son dos rectas; la $y - x = 0$ es la OA.

V.8. Tómese referencia rectangular en la que $A(\alpha, 0)$, $B(\alpha', 0)$ y $C(0, \beta)$; las alturas se cortan en el punto $(0, -\alpha\alpha'/\beta)$.

V.9. Ortocentro (intersección de las alturas) $(1, 2)$; el baricentro (intersección de las medianas) $(4/3, 2)$; el circuncentro (intersección de las mediatrices) $(3/2, 2)$.

V.10. $3x + 4y + 7 = 0$, $3x + 4y - 3 = 0$,
$4x - 3y + 16 = 0$, $4x - 3y + 6 = 0$.

V.11. $A(a, 2a)$, $B(b, -2b)$;
$x = \frac{1}{3}(a + b)$, $y = \frac{2}{3}(a - b)$;
$9 = |4ab|$.

Eliminando a y b entre las tres últimas ecuaciones: $4x^2 - y^2 = \pm 4$ (dos hipérbolas).

V.12. $$x = a + \frac{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{\operatorname{sen}\theta}x' + \frac{\operatorname{sen}(\theta - \beta)}{\operatorname{sen}\theta}y'$$

$$y = b + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta}x' + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta}y'$$

V.13.
1. $b^2 > a$.
2. $y^2 = x$ (parábola).
3. La pendiente es $m = (-1/2)\alpha$ y la perpendicularidad equivale a $m_1m_2 = -1$, o sea, $\alpha_1\alpha_2 = -1/4$; de la ecuación de α sale $\alpha_1\alpha_2 = x$, luego el lugar: $x = -1/4$.

V.14. Tómense por ejes (rectangulares) Ox y Oy al lado BC y a su altura; $A(0, a)$, $B(b, 0)$ y $C(-b, 0)$; $Q(\alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $PQ: y = m(x - \alpha)$, $m \in \mathbb{R}$; $b^2m + a = 0$; la perpendicular $b^2x - \alpha(ay + b^2) = 0$, que es un haz, luego pasan por un punto.

V.15. Sea P el punto de intersección de $ax + by + c = 0$ y $\alpha x + \beta y = 0$; sea Q el de intersección de $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ con $ax + by = 0$. El área es $4\|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ}\|$, donde O es el origen, que vale $4|c\gamma|:|a\beta - b\alpha|$.

V.16. Tomando por ejes rectangulares (Oxy) a las bisectrices de r y s, éstas tendrán ecuaciones $y = \pm mx$ $(m \in \mathbb{R}$ fijo). La suma de las distancias de $P(x, y)$ a r y s vale

$$\frac{|y - mx| + |y + mx|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

igualándolo a k se obtienen los cuatro lados del rectángulo de vértices:

$$\left(\pm \frac{k\sqrt{1+m^2}}{2m}, 0\right) \text{ y } \left(0, \pm \frac{k\sqrt{1+m^2}}{2}\right)$$

V.17. 1. $y - a = m(x - a)$ será tangente si dista r de O;

$$m^2[(\alpha - a)^2 - r^2] - 2(\alpha - a)(\beta - b)m + \\ + (\beta - b)^2 - r^2 = 0$$

2. Sean P_1 y P_2 las intersecciones de OO' con las tangentes exteriores e interiores;

$$\|\overrightarrow{P_1O_1}\| = (rd)/(r' - r) \text{ y } \|\overrightarrow{P_2O_1}\| = (rd)/(r' + r)$$

Sean $\pm\theta_1$ y $\pm\theta_2$ los ángulos de OO' con las tangentes exteriores e interiores;

$$\text{sen } \theta_1 = (r' - r)/d \quad , \quad \text{sen } \theta_2 = (r' + r)/d$$

Las tangentes son:

$$\text{ext.}: \begin{cases} x = \alpha - \dfrac{rd}{r' - r} \cos \varphi - \lambda \cos (\varphi \pm \theta_1) \\ y = \beta - \dfrac{rd}{r' - r} \text{ sen } \varphi + \lambda \text{ sen } (\varphi \pm \theta_1) \end{cases}$$

$$\text{int.}: \begin{cases} x = \alpha - \dfrac{rd}{r + r'} \cos \varphi - \lambda \cos (\varphi \pm \theta_2) \\ y = \beta - \dfrac{rd}{r + r'} \text{ sen } \varphi + \lambda \text{ sen } (\varphi \pm \theta_2) \end{cases}$$

V.18. 1. Si $X = C + QX'$, es $X' = Q^{-1}X - Q^{-1}C$; $x' = 2x + 2y - 2z$, $y' = -9x - 6y + 7z - 5$, $z' = -x - y + z$.

2. Resolviendo $X = C + QX$ se obtiene un solo punto $X(1, -1, 1)$.

V.19. 1. Es la intersección de los planos que pasan por P y r y por P y s;

$$(x, y, z) = (-1, 1, 2) + \lambda(1, 2, 3)$$

2. Intersección del plano que pasa por P y r y del plano paralelo a π por P;

$$(x, y, z) = (-1, 1, 2) + \lambda(0, 1, 1)$$

V.20. $(-2, -1, 0)$, $(0, -1, -1)$, $(0, -3/2, 1/2)$ y $(-2/3, 2/3, -4/3)$.

V.21. Si $\alpha = -2$, las rectas son paralelas y distintas; si $\alpha = -7$, las rectas se cortan en un punto; si $\alpha \neq -2, -7$, las rectas se cruzan.

V.22. 1. α cualquiera, $\beta = 2$.
2. $\alpha = 4$ y $\beta = 2$.
3. $x - y - z = 1$.

V.23. El punto medio de $P + \lambda\bar{u}$ y $Q + \mu\bar{v}$ es

$$O - (\lambda/2)\bar{u} + (\mu/2)\bar{v}$$

donde $O = P + (1/2)\overrightarrow{PQ}$ es el punto medio de las P y Q. El lugar es el plano paralelo a r y a s por O.

V.24. Si $\alpha = -4$, es paralela a π y no está incluida en él; si $\alpha = 1$, r está incluida en π; si $\alpha \neq -4, 1$, entonces r corta a π (en un punto).

V.25. Si $\alpha = 1$, los tres planos coinciden; si $\alpha \neq 1$, los tres planos se cortan en un punto (forman triedro).

V.26. Si $\alpha \neq 2$ y $\beta \neq 1$, la intersección es un punto (forman triedro); si $\alpha \neq 2$ y $\beta = 1$, la intersección es vacía y π_1 y π_2 son paralelos; si $\alpha = 2$ y $\beta = 3/2$, la intersección es una recta y π_1 y π_3 coinciden; si $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, la intersección es vacía y π_1 y π_2 son paralelos; si $\alpha = 2$ y $\beta = 2$, la intersección es vacía y π_2 y π_3 son paralelos; si $\alpha = 2$ y $\beta \neq 3/2, 1, 2$, la intersección es vacía y los planos forman un prisma.

V.27. 1. $(1, 1 - \alpha, -1)$ y $(0, 2\alpha - 1, 1 - 2\alpha)$ han de ser ortogonales; $\alpha = 2$ y $\alpha = 1/2$.
2. La intersección de $x + y + z + 2 = 0$ con el plano del haz de r perpendicular al anterior, que da:

$$\begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ \quad\;\; y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

3. Son perpendiculares, pues lo eran r y s.

V.28. Sean $\bar{u}_1$ y $\bar{v}_1$ los vectores unitarios de las direcciónes de $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

1. $P + \mathcal{V}(\bar{u}_1 + \bar{v}_1)$ y $P + \mathcal{V}(\bar{u}_1 - \bar{v}_1)$.
2. $d(X, r)^2 = \|\overrightarrow{PX}\|^2 - (\overrightarrow{PX} \cdot \bar{u}_1)^2$,
$d(X, s) = \|\overrightarrow{PX}\|^2 - (\overrightarrow{PX} \cdot \bar{v}_1)^2$;
$\overrightarrow{PX} \cdot \bar{u}_1 = \pm \overrightarrow{PX} \cdot \bar{v}_1$;

el lugar lo forman los dos planos

$$(\bar{u}_1 + \bar{v}_1) \cdot \overrightarrow{PX} = 0 \quad \text{y} \quad (\bar{u}_1 - \bar{v}_1) \cdot \overrightarrow{PX} = 0$$

V.29. $(ax + by + cz)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 \theta$.

V.30. Los planos son (para $\lambda \in \mathbb{R}$; las sumas para $i = 1, 2, 3$):

$$\Sigma a_i x_i = \lambda \Sigma a_i^2, \quad \Sigma b_i x_i = \lambda \Sigma b_i^2 \quad \text{y} \quad \Sigma c_i x_i = \lambda \Sigma c_i^2$$

eliminando λ se obtiene el lugar:

$$\frac{\Sigma a_i x_i}{\Sigma a_i^2} = \frac{\Sigma b_i x_i}{\Sigma b_i^2} = \frac{\Sigma c_i x_i}{\Sigma c_i^2} \quad \text{(una recta)}$$

V.31. Un punto y un vector de r son $P(h, k, 0)$ y $\bar{u}(a, b, 1)$; un punto y un vector de r' son $P'(h', k', 0)$ y $\bar{u}'(a', b', 1)$. La distancia vale:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PP'} \cdot (\bar{u} \wedge \bar{u}')|}{\|\bar{u} \wedge \bar{u}'\|} =$$
$$= \frac{|(a - a')(k - k') - (b - b')(h - h')|}{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2}}$$

V.32. $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$; el área del triángulo vale $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|/4$, luego

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = 4S \qquad [1]$$

1. Se eliminan a, b y c entre [1],

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{y} \quad ax = by = cz$$

y se tiene:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^4 \left(\frac{1}{(xy)^2} + \frac{1}{(yz)^2} + \frac{1}{(zx)^2} \right) = 4S^2$$

2. Se elimina a, b y c entre [1] y $x = a/3$, $y = b/3$, $z = c/3$ y se tiene:

$$81(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 4S^2$$

3. El ortocentro es la proyección del origen sobre ABC, luego el lugar es el mismo que en 1.

V.33. La línea de máxima pendiente de π sobre τ es la recta de π que es ortogonal a la intersección $\pi \cap \tau$, luego ella es:

$$P + \mathcal{V}[\bar{a} \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b})]$$

V.34. Sean $\bar{u}_0$ y $\bar{v}_0$ vectores unitarios de las direcciones de $\bar{u}$ y $\bar{v}$; sea θ el ángulo de r y s. Si $X \in r$ e $Y \in s$,

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} - \lambda \bar{u} + \mu \bar{v}$$

debe ser tal que

$$\overrightarrow{XY} \cdot \bar{u}_0 = \pm \overrightarrow{XY} \cdot \bar{v}_0$$

luego $\lambda \pm \mu = 4H$, siendo

$$4H = [\overrightarrow{PQ} \cdot (\bar{u}_0 \mp \bar{v}_0)]/(1 \mp \cos \theta)$$

se puede poner $\lambda = 2H + 2t$ y $\mu = \pm 2H \mp 2t$ con $t \in \mathbb{R}$. El punto medio buscado es:

$$M = P + \lambda \overrightarrow{PQ} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{XY} =$$
$$= O + H(\bar{u}_0 \pm \bar{v}_0) + t(\bar{u}_0 \mp \bar{v}_0)$$

donde O es el punto medio de los P y Q. El lugar es las dos rectas que pasan por

$$M_0 = O + H(\bar{u}_0 \pm \bar{v}_0)$$

y tiene la dirección del vector $\bar{u}_0 \mp \bar{v}_0$.

V.35. Se supone $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ y $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$; hay que probar que $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$;

$$0 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$
y
$$0 = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})$$

restando éstas se obtiene:

$$0 = \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

V.36. Longitud del minutero $= \|\bar{v}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = 1$.

1. La dirección de $\bar{v}$ es la de máxima pendiente de π, luego es perpendicular a $\bar{w} = (4, 2, -5)$; es $\pi: 4x + 2y - 5 = 3$.
2. El minutero ocupa la posición del vector unitario de $\bar{v} \wedge \bar{w}$; el extremo es:

$$(1 - 1/\sqrt{5},\ 2 + 2/\sqrt{5},\ 1)$$

3. Es el ángulo de $\mathcal{V}(\overrightarrow{RQ}, \bar{v})$ con $\mathcal{V}(\overrightarrow{RQ}, \bar{u})$ y vale

$$\text{arc cos } (1/2\sqrt{3}) \simeq 73{,}22°$$

4. $\theta = (\pi\alpha)/30$; $Q + (\cos\theta)\bar{v} + (\operatorname{sen}\theta)\bar{u}$;

$$x = 1 + \frac{2}{3}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\theta$$

$$y = 2 + \frac{1}{3}\cos\theta + \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\theta$$

$$z = 1 + \frac{2}{3}\cos\theta$$

5. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$,
$4x + 2y - 5z = 3$

V.37. 1. $1/2, 2, 1/2, -1, 2$.
2. P_1.

V.38. $r_1 : X_1 = P_1 + \lambda\bar{u}_1$, $r_2 : X_2 = P_2 + \lambda\bar{u}_2$;

$X = (P + 1/2\overrightarrow{PQ}) - (\lambda/2)\bar{u} + \mu\bar{v}$

Plano paralelo a r_1 y a r_2 que pasa por el punto medio de P y Q.

V.39. Si $\mathcal{V}(\bar{u}_1)$ y $\mathcal{V}(\bar{u}_2)$ son las direcciones de r_1 y r_2, las bisectrices son

$$P + \mathcal{V}\left(\frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} \pm \frac{\bar{u}_2}{\|\bar{u}_2\|}\right)$$

V.40. Si $R \in [P, Q]$, póngase $\overrightarrow{PR} = r\overrightarrow{PQ}$ con $0 < r < 1$. Si se verifica la igualdad, es $\|\bar{u} + \bar{v}\| = \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$, con $\bar{u} = \overrightarrow{PR}$ y $\bar{v} = \overrightarrow{RQ}$, o sea, $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$.

V.41. $\overrightarrow{XA} + 3\overrightarrow{XB} = 4\overrightarrow{XA'}$ y $\overrightarrow{XC} + 3\overrightarrow{XD} = 4\overrightarrow{XC'}$, donde A' y C' son los dos puntos $A' = B + (1/4)\overrightarrow{BA}$ y $C' = D + (1/4)\overrightarrow{DC}$. El lugar es el plano ortogonal a $\overrightarrow{A'C'}$ por su punto medio.

V.42. $\overrightarrow{PX_i} = \lambda_i\bar{u}$ ($\bar{u}$ unitario); $\|\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PX_i}\| = \rho$;
$\lambda^2 + 2\lambda\overrightarrow{CP} \cdot \bar{u} + (d^2 - \rho^2) = 0$;
$[PX_1][PX_2] = \lambda_1\lambda_2 = d^2 - \rho^2$.

V.43. Sean C_1, C_2, ρ_1 y ρ_2 los centros y los radios;

$$\|\overrightarrow{C_1X}\|^2 - \rho_1^2 = \|\overrightarrow{C_2X}\| - \rho_2^2$$

Poniendo

$$\overrightarrow{C_1X} = \lambda\overrightarrow{C_1C_2} + \bar{u} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{C_2X} = (\lambda - 1)\overrightarrow{C_1C_2} + \bar{u}$$

con $\bar{u} \perp \overrightarrow{C_1C_2}$ es

$$\|\overrightarrow{C_1X}\|^2 = \lambda^2 d^2 + \|\bar{u}\|^2$$

y

$$\|\overrightarrow{C_2X}\|^2 = (\lambda - 1)^2 d^2 + \|\bar{u}\|^2$$

El lugar es el plano ortogonal a $\overrightarrow{C_1C_2}$ por el punto $C = C_1 + \lambda\overrightarrow{C_1C_2}$, donde

$$\lambda = (\rho_1^2 - \rho_2^2 + d^2)/(2d^2)$$

Ejercicios y problemas a la parte VI

ENUNCIADOS

VI.1. Se considera la elipse de semiejes a y b ($a > b$) y cuyos vértices del semieje menor son los puntos B y B'. Si X es un punto de esta elipse y P y Q son los puntos en los que las rectas XB y XB' cortan al eje mayor de la elipse, pruébese que $K = \overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ es constante (O es el centro de la elipse), esto es, que no depende de X.

VI.2. Sea dada una elipse y sea F uno de sus focos. Hallar el lugar geométrico que describe el punto, P, mitad del segmento FX, al hacer que X recorra la elipse.

VI.3. Considérese una hipérbola, de ecuación reducida $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$:

1. Hallar la distancia de un foco F de la hipérbola a una de sus asíntotas.
2. Compruébese que una asíntota, la perpendicular a dicha asíntota desde un foco y la correspondiente directriz pasan por un mismo punto.

VI.4. Considérese una hipérbola de semiejes a (real) y b (imaginario). Sean d_1 y d_2 las distancias de un punto X a las asíntotas de la hipérbola. Pruébese que $k = d_1 d_2$ es constante para cualquiera que sea el punto X de la hipérbola; hallar k.

VI.5. Se considera una elipse de semiejes a (mayor) y b (menor); sean A y A' sus vértices del eje mayor, sea F uno de sus focos y sea d la correspondiente directriz. Sea X un punto cualquiera de la elipse y sean P y Q los puntos en los que las rectas XA y XA' cortan a la directriz d. Compruébese que FP y FQ son perpendiculares.

VI.6. Sean dados un punto A y una recta r que no pasa por A. Si X es un punto, del plano de A y r, sea X' su proyección ortogonal sobre r. Hallar el lugar geométrico que describe el punto X cuando se mueve de manera que $c\overline{XX'} = \overline{AX'}$, donde $c > 0$ es un número dado.

VI.7. Se considera una elipse de semiejes a (mayor) y b (menor). Sea XX' una cuerda de la elipse que se mueve manteniéndose paralela al eje menor y considérense las rectas XA y $X'A'$, donde A y A' son los vértices situados en el eje mayor. Hallar el lugar geométrico que describe el punto P de intersección de XA y $X'A'$.

VI.8. Se considera la parábola que tiene por ecuación reducida a $y^2 = 2px$. Sean X y X' dos puntos cualesquiera de la parábola tales que el ángulo XOX' es recto (O es el origen). Pruébese que XX' corta al eje de la parábola en un punto P fijo.

VI.9. Se considera una parábola de parámetro p. Hallar el lugar geométrico descrito por los puntos medios de las cuerdas XX' de la parábola que pasan por su foco F.

VI.10. Se considera la parábola de ecuación reducida $y^2 = 2px$ y se traza la normal (perpendicular a la tangente) en un punto X de ella; sea Y el punto en el que esta normal corta al eje de la parábola. Hallar el lugar geométrico del punto X' simétrico de X respecto de Y, cuando X recorre la parábola.

VI.11. Considérese la parábola que tiene su foco en F y tiene por directriz a la recta d. Comprobar que la tangente a la parábola en un punto X, cualquiera, de ella es la bisectriz de $\overline{XF}$ y $\overline{XX'}$, donde X' es la proyección de X sobre d.

VI.12. Considérese una parábola y un punto X exterior a ella; por X se trazan las tangentes a la parábola, que son tangentes en los puntos P_1 y P_2; sean P, Q_1 y Q_2 los puntos medios de P_1P_2, XP_1 y XP_2. Pruébese que:

1. XP es paralela al eje de la parábola.
2. Q_1Q_2 es tangente a la parábola y lo es en su punto medio Q.

VI.13. Una hebra de hilo anudada en sus extremos y de longitud $2p$ se mantiene formando triángulo isósceles OXX', donde O es fijo y XX' permanece paralelo a cierta dirección fija. Hallar los lugares geométricos que describen los puntos X y X'.

VI.14. Se da una circunferencia fija, con centro en O y radio r; también se considera un punto fijo, P,

siendo $\overline{OP} = 2a$. Hallar el lugar geométrico descrito por los centros, X, de las circunferencias tangentes a la circunferencia dada y que pasan por P (indicación: tómese el origen de coordenadas en el punto medio de OP).

VI.15. Dos puntos X_1 y X_2 se mueven, con la misma velocidad angular, en sendas circunferencias concéntricas de radios r_1 y r_2. En el instante inicial los puntos móviles están alineados con el centro y a un mismo lado de éste; se mueven en sentidos contrarios. Hallar la ecuación del lugar geométrico que describe el punto medio, X, de los X_1 y X_2.

VI.16. Compruébese que la tangente a una elipse en uno de sus puntos X es la bisectriz exterior del ángulo FXF' (F y F' son los focos de la elipse).

VI.17. Dada una elipse y un punto P de ella, determinar el triángulo de área máxima de entre los que tienen un vértice en P y los otros dos también están en la elipse.

VI.18. Si e_1 y e_2 son las excentricidades de dos hipérbolas conjugadas, compruébese que $(1/e_1^2) + (1/e_2^2) = 1$.

VI.19. Pruébese que si los tres vértices de un triángulo están situados en una hipérbola equilátera, entonces el ortocentro del triángulo también está en la hipérbola.

VI.20. En un punto A se efectúa un disparo; el proyectil va a velocidad v y hace impacto en un punto B. Hallar el lugar geométrico de los puntos X desde los que se escucha simultáneamente el disparo y el impacto (llámese v' a la velocidad del sonido).

VI.21. Se consideran dos hipérbolas conjugadas, de semiejes a y b. Se traza una tangente común a ambas. Hallar la distancia entre los puntos de tangencia, comprobando que es constante.

VI.22. Clasificar las siguientes cónicas:

a) $2x^2 + y^2 + 2xy - 12x - 4y + 3 = 0$.
b) $x^2 + 3y^2 + 4xy + 4x - 2y - 4 = 0$.
c) $x^2 + y^2 - 2xy + 2y + 1 = 0$.

VI.23. Clasificar las siguientes cónicas:

a) $2x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$.
b) $4x^2 + y^2 + 4xy - y = 0$.
c) $2x^2 - y^2 + xy + 3y - 2 = 0$.
d) $x^2 + y^2 - 2y + 2 = 0$.

VI.24. Clasificar la siguiente cónica, en función de los parámetros a, $b \in \mathbb{R}$.

$$(1 + a)x^2 + 2axy + ay^2 + 2bx + a - 3b^2 = 0$$

VI.25. Clasificar y hallar la ecuación reducida de la siguiente cónica:

$$11x_1^2 - 4x_1x_2 + 14x_2^2 + 40x_1 + 20x_2 + 45 = 0$$

Hallar también el centro y los ejes de dicha cónica.

VI.26. Clasificar y hallar la ecuación reducida de la siguiente cónica:

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 - 8x_2 - 20 = 0$$

Hallar los ejes en los que la ecuación es la reducida.

VI.27. Hallar la ecuación reducida, en función de θ, de la cónica:

$$x_1^2 \cos\theta - 2x_1x_2 + x_2^2 \cos\theta + 2x + 2y = 0$$

$(-\pi < \theta < \pi)$. Determinar los ejes en los que la ecuación es la reducida. Clasificar la cónica.

VI.28. Se considera una parábola, cuyo parámetro p (distancia del foco a la directriz) es fijo, que gira manteniendo su foco inmóvil. Se considera también una cierta dirección fija en el plano de la parábola y se traza la tangente a ésta que tiene la dirección dada. Hallar la ecuación, en ejes *ad hoc*, del lugar geométrico que describe el punto de tangencia.

VI.29. Se considera una cónica ordinaria con centro; sea M su matriz y sea $A = [a_{ij}]$ la submatriz de términos cuadráticos. Compruébese que los coeficientes α y β de la ecuación reducida, $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$, de la cónica son las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$(\det M)^2\lambda^2 + (\det M)\,(\det A)(a_{11} + a_{22})\lambda + (\det A)^3 = 0$$

VI.30. Comprobar que, si F es foco de una cónica C, las tangentes desde F a C son imaginarias y tienen pendientes $+i$ y $-i$ (a dichas rectas se las llama rectas isótropas que pasan por F).

VI.31. Hallar los planos tangentes a una cuádrica que son paralelos a un plano dado $ax + by + cz = 1$ (considérese una cuádrica con centro $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ y también un paraboloide $2z = \alpha x^2 + \beta y^2$).

VI.32. Indicar cómo se determinan los planos tangentes a una cuádrica que contienen a una recta dada. Supóngase que la recta y la cuádrica son:

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ a'x + b'y + c'z = 1 \end{cases} \quad C: \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$$

VI.33. Recurriendo a las identidades:

$$(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 = (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha)^2 + (2\beta)^2$$

$$(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 = (1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha)^2 - (2\beta)^2$$

$$(\alpha + \beta)^2 = (1 + \alpha\beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 - (1 - \alpha\beta)^2$$

Comprobar que el elipsoide, el hiperboloide de dos hojas y el hiperboloide de una hoja admiten, respectivamente, las siguientes ecuaciones paramétricas:

1. $\dfrac{x}{a} = \dfrac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2}$, $\dfrac{y}{b} = \dfrac{2\alpha}{1 + \alpha^2 + \beta^2}$

   $\dfrac{z}{c} = \dfrac{2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2}$ (elipsoide)

2. $\dfrac{x}{a} = \dfrac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{1 - \alpha^2 - \beta^2}$, $\dfrac{y}{b} = \dfrac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2}$

   $\dfrac{z}{c} = \dfrac{2\beta}{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ (hiperboloide de dos hojas)

3. $\dfrac{x}{a} = \dfrac{1 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}$, $\dfrac{y}{b} = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$

   $\dfrac{z}{c} = \dfrac{1 - \alpha\beta}{\alpha + \beta}$ (hiperboloide de una hoja)

VI.34. Demuéstrese, en una cuádrica con centro, que la suma de los cuadrados de las distancias del centro a tres planos tangentes ortogonales es constante; hállese dicha constante.

VI.35. Considérese un paraboloide y tres planos tangentes a él que son ortogonales entre sí. Sean P_1, P_2 y P_3 las proyecciones del vértice O sobre dichos tres planos. Pruébese que la suma de las proyecciones sobre el eje de $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$ y $\overline{OP_3}$ es constante; hállese esta constante.

VI.36. Dada una cuádrica con centros $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$, pruébese que el lugar geométrico que forman los puntos desde los que es posible trazar tres planos tangentes a la cuádrica que sean ortogonales dos a dos (forman triedro trirrectángulo circunscrito a la cuádrica) es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma$ (esfera de Monge).

VI.37. Dado un paraboloide $2z = \alpha x^2 + \beta y^2$, pruébese que el lugar geométrico que forman los puntos desde los que es posible trazar tres planos tangentes al paraboloide que sean ortogonales dos a dos es al plano $z = (\alpha + \beta):(2\alpha\beta)$, perpendicular al eje del paraboloide.

VI.38. Considérese una cuádrica con centro y sean d_1, d_2 y d_3 las longitudes de tres de sus semidiámetros (los semidiámetros son los segmentos que unen el origen con los puntos de la cuádrica). Pruébese que si los tres semidiámetros son ortogonales dos a dos, entonces $1/d_1^2 + 1/d_2^2 + 1/d_3^2$ es constante.

VI.39. Se consideran cuatro puntos alineados A, B, C y P; sean $a = \overline{PA}$, $b = \overline{PB}$ y $c = \overline{PC}$ (fijos). El segmento $ABCP$ se mueve de manera que A, B y C se desplazan, respectivamente, por los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Hállese el lugar geométrico que describe el punto P.

VI.40. Dada la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, $z = 0$, hallar el lugar geométrico de los vértices X de los triedros trirrectangulares cuyas aristas cortan a la hipérbola.

VI.41. Hallar el lugar geométrico de los puntos X tales que su distancia al origen y su distancia al plano $z = d$ están en la relación e (constante). Discutir el resultado en función de los valores de $e > 0$.

VI.42. En cada punto X del hiperboloide de una hoja $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ se traza la normal exterior y en ella se toma un punto Y a distancia constante de X. Comprobar que, si se cumple cierta condición (que se pide), estos puntos Y pueden estar todos en un cierto cilindro; hállese dicho cilindro.

VI.43. Considérese una cualquiera de las generatrices rectilíneas de un hiperboloide de una hoja. Probar que la proyección de la generatriz sobre el plano de la elipse de garganta es tangente a dicha elipse.

VI.44. Considérese una cualquiera de las generatrices rectilíneas del paraboloide hiperbólico $2z = (x^2/p) - (y^2/q)$. Probar que la proyección de la generatriz sobre el plano $y = 0$ es tangente a la parábola del paraboloide situada en dicho plano.

VI.45. Se considera el paraboloide hiperbólico (reglado) $2z = x^2/p - y^2/q$ y sus dos planos principales ($x = 0$ e $y = 0$). Una generatriz cualquiera del hiperboloide corta a sus planos principales en los puntos P y Q; hallar el lugar geométrico que describe el punto X medio de los P y Q.

VI.46. Hallar la ecuación del hiperboloide que tiene el mismo cono asintótico que:

$$C:\ x^2 - y^2 + 4xz - 2yz + 10z + 1 = 0$$

y que es tangente al plano π: $2x - y + z = 0$.

VI.47. Considérese la cuádrica que en cierta referencia cartesiana admite por ecuación a:

$$x^2 - y^2 + pz^2 + 2x + 2(p-1) + p = 0$$

($p \in \mathbb{R}$ parámetro).

1. Hallar p para que la cuádrica sea un par de planos y hallar éstos.
2. Hallar los valores de p para los que la cuádrica es reglada.
3. Hallar, si la cuádrica es reglada, sus dos generatrices rectilíneas que pasan por el punto $A(-1, -1, 1)$ de la cuádrica.

VI.48. Se considera la siguiente cuádrica C:

$$C:\ 2x^2 - y^2 - 3z^2 - 2xz - 4y + 10 = 0$$

1. Hallar el lugar geométrico que engendran las tangentes a C en el punto $P_1(1, 2, 0)$ de ella.
2. Hallar el lugar geométrico que engendran las tangentes a C desde el punto $P_2(0, 2, 0)$, que no es de C. Hallar el plano en el que se encuentran los puntos de contacto con C de dichas tangentes.
3. Comprobar que el plano $z = 2$ es tangente a C y hallar su punto de tangencia.
4. Analizar si existe algún plano paralelo al $x = 0$ que sea tangente a la cuádrica C.

VI.49. Sea C una cuádrica ordinaria que en cierta referencia cartesiana tiene a M por matriz. Se llama *polo* de un plano al punto cuyo plano polar es el plano dado. Hallar la columna de coordenadas del polo de un plano en función de la columna U de los coeficientes u_0, u_1, u_2, u_3 de la ecuación del plano dado. Hallar la condición, a cumplir por U, que caracteriza a los planos tangentes a la cuádrica.

VI.50. Hallar la ecuación del lugar geométrico que describe el centro de la siguiente cuádrica, al variar los parámetros a y b:

$$x^2 + y^2 - z^2 + axz + byz - 2x - 8y + 4z = 0$$

VI.51. Clasificar las siguientes cuádricas:

a) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 12xz - 4yz + 2x - 6y - 4z + 1 = 0$.
b) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2x + 1 = 0$.
c) $-x^2 + y^2 - 2z^2 - 6xz + 2yz - 2x - 6y = 2$.

VI.52. Clasificar las siguientes cuádricas:

a) $y^2 + z^2 - 2yz + 6x = 4$.
b) $5x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 6xy + 4xz + 6x + 8y + 3 = 0$.
c) $3x^2 + 2y^2 + 6xy + 8x + 4y + 2z + 2 = 0$.

VI.53. Clasificar la siguiente cuádrica, en función del valor que tome el parámetro α:

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2\alpha yz - 4y + 1 = 0$$

VI.54. Clasificar, en función del parámetro p, la siguiente cuádrica:

$$x^2 + py^2 + (p-1)z^2 + 2xy - 2yz + 2x + 2z + 4 = 0$$

VI.55. Clasificar, en función de los parámetros a y b, la siguiente cuádrica:

$$3x^2 + 2y^2 + az^2 + 4xy + 2x + 2bz + 1 = 0$$

VI.56. Hallar la ecuación reducida de la siguiente cuádrica y clasificarla:

$$6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_1 - 8x_2 + 9 = 0$$

Hallar su centro y sus ejes. Esta cuádrica, ¿es de revolución?

VI.57. Considérense las cuádricas que, en ejes rectangulares, admiten ecuación del tipo:

$$\alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 + \alpha x_3^2 + 2(1-\alpha)x_1x_3 + \\ + 2x_1 + 2x_3 + 3 = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Clasificar las cuádricas dadas, en función de $\alpha \in \mathbb{R}$. Hallar los valores de α para los que se obtiene una cuádrica de revolución. Hallar la ecuación reducida de la cuádrica correspondiente a $\alpha = 3$; determinar sus ejes.

VI.58. Sea $C(p)$ la cuádrica, dependiente del parámetro p, que en cierta referencia cartesiana rectangular tiene por ecuación a:

$$4x_1^2 + 2(p-1)x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 + 2px_2 + p = 0$$

a) Clasificar la cuádrica $C(P)$, en función de p.

b) Obtener la ecuación reducida de la cuádrica $C(-1)$.

c) Obtener la ecuación reducida de aquella de las cuádricas $C(p)$ que es paraboloide.

d) Obtener la referencia correspondiente a la anterior ecuación.

VI.59. *a*) Hallar (en ejes rectangulares xyz) la ecuación general de todos los paraboloides que contienen a la parábola $y^2 = 2x$, $z = 0$. *b*) De entre ellos, determinar los que son de revolución. *c*) Hallar el lugar geométrico descrito por los vértices de estos últimos.

SOLUCIONES

VI.1. $X(\alpha, \beta)$ con $\alpha^2/a^2 + \beta^2/b^2 = 1$; $\overline{OP} = b\alpha : (b - \beta)$ y $\overline{OQ} = b\alpha : (b + \beta)$; $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = (b^2\alpha^2) : (b^2 - \beta^2) = a^2$.

VI.2. Elipse de semiejes a y b; distancia focal $2c$. Si $P(x, y)$, entonces $X(2x - c, 2y)$ satisface a la ecuación de la elipse, luego

$$\frac{(x - c/2)^2}{(a/2)^2} + \frac{y^2}{(b/2)^2} = 1$$

El lugar en la elipse de semiejes mitad de los de la elipse E dada, que tiene por centro al punto medio de F y del centro de E y con igual eje mayor que E.

VI.3. 1. Foco $(c, 0)$, asíntota $bx - ay = 0$, distancia $|-cb| : \sqrt{a^2 + b^2} = b$.
2. Asíntota $bx - ay = 0$, perpendicular $ax + by = ac$, directriz $x = a^2/c$; las tres pasan por $(a^2/c, ba/c)$.

VI.4. $X(\alpha, \beta)$ con $\alpha^2/a^2 - \beta^2/b^2 = 1$.

$$k = d_1 \cdot d_2 = \frac{|\alpha/a - \beta/b|}{\sqrt{1/a^2 + 1/b^2}} \cdot \frac{|\alpha/a + \beta/b|}{\sqrt{1/a^2 + 1/b^2}} =$$

$$= \frac{1}{1/a^2 + 1/b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

VI.5. $X(\alpha, \beta)$ con $\alpha^2/a^2 + \beta^2/b^2 = 1$; $F(c, 0)$ con $c^2 = a^2 + b^2$; $d : x = a^2/c$.

$$P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{a(a - c)\beta}{c(\alpha - a)}\right) \quad , \quad Q\left(\frac{a^2}{c}, \frac{a(a + c)\beta}{c(\alpha + a)}\right)$$

$$\overline{FP} \cdot \overline{FQ} = \frac{(a^2 - c^2)^2}{c^2} + \frac{a^2(a^2 - c^2)\beta^2}{c^2(\alpha^2 - a^2)} =$$

$$= \frac{b^2}{c^2}\left(b^2 + \frac{a^2b^2 - b^2\alpha^2}{\alpha^2 - a^2}\right) = 0$$

VI.6. Tomando a r como «eje de la y» y el «eje de la x» pasando por A, con lo que $A(a, 0)$. Lugar $c|x| = \sqrt{a^2 + y^2}$, o sea, $c^2x^2 - y^2 = a^2$, hipérbola de semiejes a/c y a.

VI.7. $X(\alpha, \beta)$, $X' = (\alpha, -\beta)$ con $\alpha^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

$$AX : \beta x + (a - \alpha)y = a\beta$$
$$A'X' = \beta x + (a + \alpha)y = -a\beta$$

Eliminando α y β entre las tres ecuaciones,

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

VI.8. $X(\alpha^2/2p, \alpha)$, $X'(\beta^2/2p, \beta)$.

$$\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = 0 \quad , \quad \alpha\beta = -4p^2 \quad ; \quad P(h, 0)$$

con

$$h = \frac{\alpha^2}{2p} + \frac{\alpha}{\alpha - \beta}\,\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2p} = \frac{-\alpha\beta}{2p} = 2p$$

El punto $P(2p, 0)$ es fijo.

VI.9. $y^2 = 2px$, $F(p/2, 0)$, $X(\alpha^2/2p, \alpha)$, $X'(\beta^2/2p, \beta)$. X, X', F alineados, luego

$$\left(\frac{\alpha^2}{2p} - \frac{p}{2}\right) : \alpha = \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2p}\right) : (\beta - \alpha)$$

o sea, $\alpha\beta = -p^2$. Punto medio:

$$x = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4p} \quad , \quad y = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Eliminando α y β entre las tres últimas ecuaciones se obtiene $y^2 = px - p^2/2$ (parábola de parámetro mitad que la dada, con el mismo eje y con vértice en el foco de aquélla).

VI.10. $X(x_0, y_0)$ con $y_0^2 = 2px_0$; la normal es $y_0x + py = y_0x_0 + py_0$; $Y(x_0 + p, 0)$; $X'(x_0 + 2p, y_0)$. Lugar $y^2 = 2p(x - 2p)$.

VI.11. Parábola $y^2 = 2px$, $F(p/2, 0)$, $X(x_0, y_0)$, $X'(-p/2, y_0)$. Como $XF = XX'$, la bisectriz es la mediatriz de $X'F$, que es $-px + y_0(y - y_0/2) = 0$, que coincide con la tangente $yy_0 = px + px_0$.

VI.12. Parábola $y^2 = 2px$, $X(\alpha, \beta)$:

1. P_1, P_2: $y^2 = 2px$, $y\beta = px + p\alpha$;

$$P\left(\frac{\beta^2}{p} - \alpha, \beta\right)$$

luego $\overrightarrow{XP}$ paralelo al eje.

2. Q punto medio de XP,

$$Q\left(\frac{\beta^2}{2p}, \beta\right)$$

pertenece a la parábola y la tangente en él es $y\beta = px + p\beta^2/2p$, que es paralela a P_1P_2, luego es Q_1Q_2.

VI.13. Tómense ejes rectangulares Oxy con Ox paralelo a la dirección fija.

$$\overline{OX} + \overline{XX'} + \overline{X'O} = 2p \ ; \ X(x, y) \ , \ X'(-x, y);$$

$2\sqrt{x^2+y^2} + 2x = 2p$; $y^2 = -2px + p^2$ lugar de X; $y^2 = 2px + p^2$ lugar de X'; ambos para $-p \leqslant y \leqslant p$.

VI.14. OP = «eje de la x» con origen en el punto medio de OP; $O(-a, 0)$, $P(a, 0)$, $X(x, y)$;

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2} = r - \sqrt{(x+a)^2+y^2};$$

$4(r^2 - 4a^2)x^2 + 4r^2y^2 = r^4 - 4r^2a^2$, que es elipse o hipérbola según que P sea interior o exterior a la circunferencia; sus focos son O y P.

VI.15. $X_1(r_1 \cos \omega t, r_1 \operatorname{sen} \omega t)$, $X_2(r_2 \cos \omega t, -r_2 \operatorname{sen} \omega t)$, ω = velocidad angular.

$$X\begin{cases} x = \frac{1}{2}\,(r_1 + r_2) \cos \ \omega t \\ y = \frac{1}{2}(r_1 - r_2) \ \operatorname{sen} \ \omega t \end{cases}$$

$$X\colon \frac{4x^2}{(r_1+r_2)^2} + \frac{4y^2}{(r_1-r_2)^2} = 1$$

VI.16. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $X(\alpha, \beta)$, tangente

$$(\alpha x)/a^2 + (\beta y)/b^2 = 1$$

$$\overrightarrow{FX}(\alpha - c, \beta) \quad , \quad \overrightarrow{F'X}(\alpha + c, \beta)$$

$$\|\overrightarrow{FX}\| = (a^2 - \alpha c) : a \quad , \quad \|\overrightarrow{F'X}\| = (a^2 + \alpha c) : a$$

bisectriz interior

$$\frac{\overrightarrow{FX}}{\|\overrightarrow{FX}\|} + \frac{\overrightarrow{F'X}}{\|\overrightarrow{F'X}\|} = \frac{2a}{(a^4 - \alpha^2c^2)}\,(\alpha b^2, \beta b^2)$$

es perpendicular a la tangente.

VI.17. Considérese la elipse como proyección de una circunferencia sobre un plano. En la circunferencia, el mayor área se obtiene si el triángulo es equilátero; al proyectar, se obtiene que el triángulo pedido es el siguiente: si O es el centro de la elipse y P' el punto diametralmente opuesto de P, el lado del triángulo opuesto a P es paralelo a la tangente en P trazada por el punto medio de P' y O.

VI.18. $e_1 = c/a$, $e_2 = c/b$, $c^2 = a^2 + b^2$,
$c^2 = (c/e_1)^2 + (c/e_2)^2$.

VI.19. Hipérbola $xy = k$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$. Altura correspondiente a P_3:

$$x_1x_2x_3(x - x_3) - kx_3y + k^2 = 0$$

que corta a la hipérbola (además de en P_3) en $P(x_0, y_0)$ con $x_0 = -k^2/(x_1x_2x_3)$. Las otras dos alturas también pasan por P (por simetría), que es entonces el ortocentro.

VI.20. $(\overline{AX} - \overline{BX}) : v' = \overline{AB} : v$. Hipérbola con focos en A y B y constante $2a = \overline{AB}(v'/v)$.

VI.21.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Tangentes a una y otra

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{yy_2}{a_2} - \frac{xx_2}{b^2} = 1$$

Como las tangentes son iguales y los puntos son de las hipérbolas, es:

$$\frac{x_1}{a^2} = -\frac{x_2}{b^2} \quad , \quad \frac{y_1}{b^2} = -\frac{y_2}{a^2}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{y_2^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

de donde

$$x_1 = \frac{-a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad , \quad y_1 = \frac{-b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$x_2 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad , \quad y_2 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

luego la distancia pedida vale

$$(a^2 + b^2)\sqrt{2} : \sqrt{a^2 - b^2}$$

VI.22. *a*) $\det A > 0$ y $\operatorname{sig} M = \{2, 1\}$, elipse real.
b) $\det A < 0$ y $\det M \neq 0$, hipérbola.
c) $\det A = 0$ y $\det M \neq 0$, parábola.

VI.23. *a*) $\det A > 0$ y $\det M = 0$, dos rectas imaginarias concurrentes; *b*) $\det A = 0$ y $\det M \neq 0$, parábola; *c*) $\det A < 0$ y $\det M = 0$, dos rectas reales concurrentes; *d*) $\det A > 0$ y $\operatorname{sig} M = \{3, 0\}$, elipse imaginaria.

VI.24. $\det A = a$, $\det M = a(a - 4b^2)$; diagonalización de $M: (1, a, a - 4b^2)$. Si $a = 0$, dos rectas paralelas; si $a < 0$, es $\det A < 0$ y $\det M \neq 0$, hipérbola; si $4b^2 < a$, $\det A > 0$ y $\operatorname{sig} M = \{3, 0\}$, elipse imaginaria; si $4b^2 = a > 0$, $\det A > 0$ y $\det M = 0$, dos rectas imaginarias conjugadas; si $0 < a < 4b^2$, $\det A > 0$ y $\operatorname{sig} M = \{2, 1\}$, elipse real.

VI.25. $\det A = 150$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 15$, $\det M = -3.750$; elipse real; $2x^2 + 3y^2 = 5$; centro $(2, 1)$; direcciones de los ejes $\bar{u}_1(1, -2)$ y $\bar{u}_2(2, 1)$.

VI.26. $\det A = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, $\det M = -100$; parábola; $\sqrt{5}y^2 = 4x$; dirección de la parábola $\bar{\delta}(1, -2)$; eje (polar de $(0, 2, 1)$) $2x + y = 0$; vértice $(1, -2)$; tangente en el vértice $x - 2y = 5$.

VI.27. $\det A = \cos^2\theta - 1$, $\lambda_1 = \cos\theta + 1$, $\lambda_2 = \cos\theta - 1$, $\det M = -2(1 + \cos\theta)$; hipérbola; $(\cos^2\theta - 1)x^2 + (\cos\theta - 1)^2 y^2 = 2$; centro $[1 : (1 - \cos\theta), 1 : (1 - \cos\theta)]$; direcciones de los ejes $(1, 1)$ y $(1, -1)$.

VI.28. Origen en el foco, «eje x» con la dirección dada; directriz $x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta = p$; parábola

$$x^2 \operatorname{sen}^2\theta + y^2 \cos^2\theta - 2xy \operatorname{sen}\theta \cos\theta + 2p(x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta) = p^2$$

la polar de $(0, 1, 0)$ es

$$x \operatorname{sen}^2\theta - y \operatorname{sen}\theta \cos\theta + p \cos\theta = 0$$

eliminando θ queda $p^2(x^2 + y^2) = 4y^4$.

VI.29. Invariantes:

$$\alpha + \beta = -\det A(a_{11} + a_{12}) : (\det M)$$

y

$$\alpha\beta = (\det A)^3 : (\det M)^2$$

que son la suma y el producto de las raíces de la ecuación del enunciado.

VI.30. Tomando origen la F y con «eje x» perpendicular a la directriz $(x = d)$, la cónica es

$$x^2 + y^2 = e^2(x - d)^2$$

Ecuación de las tangentes desde el origen $x^2 + y^2 = 0$, o sea, $y = \pm ix$.

VI.31. Cuádrica con centro: $\alpha xx_0 + \beta yy_0 + \gamma zz_0 = 1$ ha de ser paralelo al plano dado,

$$\alpha x_0/a = \beta y_0/b = \gamma z_0/c \quad \text{y} \quad \alpha x_0^2 + \beta y_0^2 + \gamma z_0^2 = 1$$

luego

$$x_0 = \rho a/\alpha \quad , \quad y_0 = \rho b/\beta \quad \text{y} \quad z_0 = \rho c/\gamma$$

con

$$\rho = 1 : \sqrt{a^2/\alpha + b^2/\beta + c^2/\gamma}$$

y el plano tangente

$$ax + by + cz = \sqrt{a^2/\alpha + b^2/\beta + c^2/\gamma}$$

Igualmente, para el paraboloide

$$ax + by + cz + \frac{a^2\beta + b^2\alpha}{\alpha\beta c^2} = 0$$

VI.32. $\alpha xx_0 + \beta yy_0 + \gamma zz_0 = 1$ debe coincidir con

$$(a + \lambda a')x + (b + \lambda b')y + (c + \lambda c')z = 1 + \lambda$$

siendo $\alpha x_0^2 + \beta y_0^2 + \gamma z_0^2 = 1$;

$$\lambda^2\left(\frac{a'^2}{\alpha} + \frac{\beta'^2}{\beta} + \frac{c'^2}{\gamma} - 1\right) + 2\lambda\left(\frac{aa'}{\alpha} + \frac{bb'}{\beta} + \frac{cc'}{\gamma} - 1\right) + \left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} - 1\right) = 0$$

Para cada λ raíz de esta ecuación se obtiene uno de los planos tangentes.

VI.33. Dividiendo cada una de las identidades por sus primeros miembros, las paramétricas resultan evidentes.

VI.34. $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$; plano tangente

$$\alpha x_0 x + \beta y_0 y + \gamma z_0 z = 1 \quad \text{o} \quad xu + yv + zw = h$$

(h distancia al origen, (u, v, w) unitario normal al plano); identificando queda

$$h^2 = (u^2/\alpha) + (v^2/\beta) + (w^2/\gamma)$$

Si los tres planos tangentes son $u_i x + v_i y + w_i z = h_i$, sumando se obtiene $\Sigma h_i^2 = 1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma$.

VI.35. $2z = \alpha x^2 + \beta y^2$; plano tangente

$$\alpha x_0 x + \beta y_0 y - z - z_0 = 0 \quad \text{o} \quad xu + yv + zw = h$$

(h distancia al origen, (u, v, w) unitario normal al plano); identificando queda

$$h = -(u^2/\alpha + v^2/\beta) : (2w)$$

la proyección de $\overline{OP}$ vale

$$hw = -(u^2/\alpha + v^2/\beta) : 2$$

Si los tres planos son $u_i x + v_i y + w_i z = h_i$, sumando las proyecciones se obtiene $\Sigma w_i h_i = -(1/\alpha + 1/\beta) : 2$.

VI.36. Según se vio en el Ejercicio VI.34, tres planos tangentes perpendiculares entre sí son

$$xu_i + yv_i + zw_i = [u_i^2/\alpha + v_i^2/\beta + w_i^2/\gamma]^{1/2}$$

elevando al cuadrado y sumando, como los (u_i, v_i, w_i) forman base ortonormal, se obtiene la esfera de Monge.

VI.37. Según se vio en el Ejercicio VI.35, tres planos tangentes perpendiculares entre sí son

$$u_i x + v_i y + w_i z = -(u_i^2/\alpha + v_i^2/\beta) : (2w_i)$$

eliminando los parámetros (teniendo en cuenta que los (u_i, v_i, w_i) forman base ortonormal) se obtiene el plano del enunciado.

VI.38. $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$. Si ($u_i$, v_i, w_i) es el unitario de la dirección del semidiámetro d_i, es

$$1/d_i^2 = \alpha u_i^2 + \beta v_i^2 + \gamma w_i^2$$

Teniendo en cuenta que los (u_i, v_i, w_i) forman base ortonormal, sumando se obtiene el resultado pedido.

VI.39. Si (u, v, w) es el unitario de la dirección del segmento, $P(au, bv, cw)$ como $u^2 + v^2 + z^2 = 1$, el lugar es el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

VI.40. $X(\alpha, \beta, \gamma)$; una arista $x = \alpha + \lambda u$, $y = \beta + \lambda v$, $z = \gamma + \lambda w$, (u, v, w) unitario; por cortar a la hipérbola

$$w^2(\alpha^2/a^2 - \beta^2/b^2 - 1) + u^2(\gamma^2/a^2) - v^2(\gamma^2/b^2) -$$
$$- 2uw(\alpha\gamma/a^2) + 2vw(\beta\gamma/b^2) = 0$$

Sustituyendo (u, v, w) por (u_i, v_i, w_i), donde estos vectores forman base ortonormal, eliminando los parámetros se obtiene:

$$\alpha^2/a^2 - \beta^2/b^2 + z^2(1/a^2 - 1/b^2) = 1$$

VI.41. $x^2 + (1 - e^2)y^2 + 2de^2 z = d^2 e^2$. Si $e > 1$, es un hiperboloide de dos hojas; para $e = 1$, es un paraboloide elíptico; si es $e < 1$, es un elipsoide (todos ellos de revolución).

VI.42. $X(x_0, y_0, z_0)$ con

$$x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 + z_0^2/c^2 = 1$$

$Y(x, y, z)$ con

$$x = x_0 + \lambda x_0/a \quad , \quad y = y_0 + \lambda y_0/b \quad , \quad z = z_0 - \lambda z_0/c$$

ecuación del lugar de Y (eliminando x_0, y_0, z_0)

$$x^2 : (a + \lambda/a)^2 + y^2 : (b + \lambda/b)^2 - z^2 : (c - \lambda/c)^2 = 1$$

Es cilindro si $c = \lambda/c$ y el cilindro es

$$\frac{a^2x^2}{(a^2 + c^2)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2 + c^2)^2} = 1$$

VI.43. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$; generatriz rectilínea

$$x = a\ [\cos\ \theta \pm (\text{sen}\ \theta/c)z]$$
$$y = b\ [\text{sen}\ \theta \mp (\cos\ \theta/c)z]$$

proyección: $(x/a) \cos\ \theta + (y/b)$ sen $\theta = 1$, $z = 0$, que es tangente a la elipse de garganta en

$$x = a \cos\theta, \quad y = b\ \text{sen}\ \theta, \quad z = 0$$

VI.44. Generatriz rectilínea

$$x = \sqrt{p}(\mu + z/2\mu) \quad , \quad y = \pm\sqrt{q}(\mu - z/2\mu)$$

proyección: $x = \sqrt{p}(\mu + z/2\mu)$, $y = 0$, que es tangente a la parábola $2z = x^2/p$, $y = 0$ en el punto $x_0 = 2\mu\sqrt{p}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 2\mu^2$.

VI.45. Generatrices

$$x/\sqrt{p} \pm y/\sqrt{q} = 2\lambda \quad , \quad x/\sqrt{p} \mp y/\sqrt{q} = z/\lambda$$

(λ parámetro);

$$P(0, \pm 2\lambda\sqrt{q}, -2\lambda^2) \quad , \quad Q(2\lambda\sqrt{p}, 0, 2\lambda^2)$$
$$X(\lambda\sqrt{p}, \pm\lambda\sqrt{q}, 0)$$

Lugar: recta $x\sqrt{q} \pm y\sqrt{p} = 0$, $z = 0$.

VI.46. La ecuación sólo difiere de la dada en el término independiente, que llamaremos a. La cónica $C \cap \pi$ debe ser degenerada, lo que equivale a que lo sea su proyección sobre $z = 0$, que es

$$-7x^2 + 8xy - 3y^2 + 10y + a = 0$$

luego $a = -35$.

VI.47. Diagonalización de M: $(1, p, -p, a-1)$.

1. rang $M = 2$, $p = 0$, $x = y$ y $x + y + 2 = 0$.
2. sig $M = (2, 2)$, $a < 1$.
3. Están en el plano tangente $y + z = 0$ y son:

$$x = -1 + \lambda(p-1)$$
$$y = -1 \pm \lambda\sqrt{1-p}$$
$$z = 1 \mp \lambda\sqrt{1-p} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

VI.48.
1. El plano tangente en P_1: $2x - 4y - z + 6 = 0$.
2. El cono circunscrito desde

$$P_2 : 2x^2 + 7y^2 - 3z^2 - 2xz - 4y - 24y + 28 = 0$$

el plano es el polar de $P_2 : 2y = 3$.
3. El punto que tiene a $z = 2$ como plano polar es el $Q(1, -2, 2)$; como Q es de $z = 2$, éste es tangente a C en Q.
4. La intersección de C con $x = h$ debe su degenerada, lo que equivale a $7h^2 + 42 = 0$, que no es posible.

VI.49.

$$U = M[\dot{x}] \quad \text{luego} \quad [\dot{x}] = M^{-1}U$$

El plano U es tangente sii su polo le pertenece, esto es, sii

$$U^t[\dot{x}] = O$$

o sea:

$$U^t M^{-1} U = O \quad \text{(ecuación tangencial)}$$

VI.50. Eliminando a y b de $x + (a/2)z = 1$, $(a/2)x + (b/2)y - z + 2 = 0$, $y + (a/2)z = 4$ se tiene:

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - 4y - 2z = 0$$

VI.51[*].
a) sig $M = \{2, 1\}$ y sig $A = \{2, 1\}$; cono real.
b) sig $M = \{3, 1\}$ y sig $A = \{2, 0\}$; paraboloide elíptico.
c) sig $M = \{2, 2\}$ y sig $A = \{2, 1\}$; hiperboloide reglado.

VI.52[*].
a) sig $M = \{2, 1\}$ y sig $A = \{1, 0\}$; cilindro parabólico.
b) sig $M = \{3, 1\}$ y sig $A = \{3, 0\}$; elipsoide real.
c) sig $M = \{2, 2\}$ y sig $A = \{1, 1\}$; paraboloide reglado.

VI.53[*]. Diagonalizaciones de M y A: $(1, 1, -1, 3-\alpha^2)$ y $(1, 1, 1-\alpha^2)$. $|\alpha| < 1 \to$ sig $M = \{3, 1\}$ y sig $A = \{3, 0\}$, elipsoide real; $|\alpha| = 1 \to$ sig $M = \{3, 1\}$ y sig $A = \{2, 0\}$, paraboloide elíptico; $1 < |\alpha| < \sqrt{3} \to$ sig $M = \{3, 1\}$ y sig $A = \{2, 1\}$, hiperboloide elíptico; $|\alpha| = \sqrt{3} \to$ sig $M = \{2, 1\}$ y sig $A = \{2, 1\}$, cono real; $|\alpha| > 3 \to$ sig $M = \{2, 2\}$ y sig $A = \{2, 1\}$, hiperboloide reglado.

VI.54. Diagonalizaciones de M y A: $(1, 1, 3p-2, p-2)$ y $(1, 2-p, p)$. $p < 0$, hiperboloide reglado; $p = 0$, paraboloide reglado; $0 < p < 2/3$, hiperboloide reglado; $p = 2/3$, cono real; $2/3 < p < 2$, hiperboloide elíptico; $p = 2$, cilindro imaginario; $p > 2$, elipsoide imaginario.

VI.55[*]. $a > 0$ y $b \neq 0 \to$ sig $M = \{3, 1\}$ y sig $A = \{3, 0\}$, elipsoide real; $a < 0$ y $b \neq 0 \to$ sig $M = \{3, 1\}$ y sig $A = \{2, 1\}$, hiperboloide elíptico; $a > 0$ y $b = 0 \to$ sig $M = \{3, 0\}$ y sig $A = \{3, 0\}$, cono imaginario; $a < 0$ y $b = 0 \to$ sig $M = \{2, 1\}$ y sig $A = \{2, 1\}$, cono real; $a = 0$ y $b \neq 0 \to$ sig $M = \{3, 1\}$ y sig $A = \{2, 0\}$, paraboloide elíptico; $a = 0$ y $b = 0 \to$ sig $M = \{2, 0\}$ y sig $A = \{2, 0\}$, par de planos imaginarios (con intersección real).

VI.56. $\det M = -32$, $\det A = 32$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 8$; $2x^2 + 2y^2 + 8z^2 = 1$; es de revolución $(\lambda_1 = \lambda_2)$. Centro $(-1, 2, 0)$; eje de revolución $\bar{\delta}(2, -1, -1)$; todo vector ortogonal a $\bar{\delta}$ es eje. Elipsoide real.

[*] Por brevedad, al escribir las signaturas de las matrices se pondrá $\{p, q\}$ en lugar de (p, q) o (q, p).

VI.57. Diagonalizaciones de M y A:

$$(1, 1, 1-\alpha, \alpha - 1/2) \quad \text{y} \quad (1, 1-\alpha, \alpha - 1/2)$$

Para $\alpha < 1/2$ y $\alpha > 1$ hiperboloide elíptico; para $\alpha = 1/2$ y $\alpha = 1$, cilindro imaginario; para $1/2 < \alpha < 1$, elipsoide imaginario. Autovalores de A, $\lambda_1 = 1 - \alpha$, $\lambda_2 = 2\alpha - 1$, $\lambda_3 = 1$; es de revolución para $\alpha = 0$ (para $\alpha = 1$ y $\alpha = 2/3$ imaginaria). Para $\alpha = 3$, det $M = -10$, det $A = -10$, $2x^2 - y^2 - z^2 = 1$; centro $(1, 0, 1)$; direcciones de los ejes $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 0, -1)$.

VI.58. *a*) Diagonalizaciones de M y A: $(1, 1, p, p-2)$ y $(1, 1, p-1)$; si $p < 0$, hiperboloide reglado; si $p = 0$, cono real; si $0 < p < 1$, hiperboloide elíptico; si $p = 1$, paraboloide elíptico; si $1 < p < 2$, elipsoide real; si $p = 2$, cono imaginario; si $p > 2$, elipsoide imaginario.

b) det $M = 12p(p-2)$, det $A = 24(p-1)$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 2(p-1)$; para $p = -1$, $3x^2 + y^2 - 2z^2 = 3/8$.

c) Paraboloide si $p = 1$: $z = x^2 + 3y^2$.

d) Dirección del paraboloide $\bar{\delta}(0, 1, 0)$, direcciones seudoejes $\bar{u}_1(1, 0, -1)$ y $\bar{u}_2(1, 0, 1)$; eje: $x = z = 0$ y vértice $(0, -1/2, 0)$.

VI.59. *a*) $y^2 - 2x + z(ax + by + cz + d) = 0$ con $a = 0$, ya que det $A = 0$. *b*) Los autovalores no nulos de A iguales, luego $(c-1)^2 = b^2$, o sea, $c = 1$ y $b = 0$, con lo que: $y^2 - 2x + z^2 + dz = 0$. *c*) Eje $y = 0$, $z = -d/2$; lugar: $z^2 + 2x = 0$, $y = 0$.